Elementos de la Matemática
(Ejercicios Prácticos)

Manuel Maia

Abril 27 de 2005

1 Teoría de Conjuntos

1. Exprese por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x < 6\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{N} \mid$ x es un número par y $2 < x < 7\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$

   (d) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{6}{5} \leq x < \frac{15}{4}\right\}$

   (e) $\{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

   (f) $\{x \in \mathbb{N} \mid$ x es un número par ó $2 < x < 7\}$

2. Exprese por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

   (b) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

   (c) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

   (d) $\{3, 10, 17, 24, 31, \dots\}$

   (e) $\{\dots, -32, -16, -8, -4, -2\}$

3. Responda lo siguiente acerca de $\in$ y $\subseteq$:

   (a) es $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$?,

   (b) es $\{2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$?,

   (c) es $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$?,

   (d) es $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$?,

   (e) es $1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$?,

   (f) es $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$?,

   (g) es $\varnothing \subseteq \{4\}$?,

(h) es $\{3\} \subseteq \{\{3\}\}$?,

(i) es $\{3\} \in \{\{3\}\}$?

4. ¿verdadero o falso?:

   (a) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$, para A, B, C cualesquiera,

   (b) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$, para A, B, C cualesquiera,

   (c) $A \subseteq B$ y $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$, para A, B, C cualesquiera,

   (d) $A \subseteq B$ y $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cup C$, para A, B, C cualesquiera.

5. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**?

   (a) $2 \in A \cup B \Rightarrow$ si $2 \notin A$, entonces $2 \in B$,

   (b) $\{2,3\} \subseteq A \Rightarrow 2 \in A$ y $3 \in A$,

   (c) $\{2,3\} \subseteq A \cap B \Rightarrow \{2,3\} \subseteq A$ y $\{2,3\} \subseteq B$,

   (d) $\{3\} \subseteq A - B$ y $\{2\} \subseteq B \Rightarrow \{2,3\} \subseteq A \cup B$,

   (e) $\{2\} \subseteq A$ y $\{3\} \subseteq A \Rightarrow \{2,3\} \subseteq A$.

6. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**?

   (a) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$, para A, B, C cualesquiera,

   (b) $A - (C \cup B) = (A - B) - C$, para A, B, C cualesquiera,

   (c) $B - (A \cup C) = (B - C) - A$, para A, B, C cualesquiera,

   (d) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$, para A, B, C cualesquiera,

   (e) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$, para A, B, C cualesquiera.

7. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$ y $C = \{b, e, f, g\}$, donde U es el conjunto universal o referencial. Determine:

(i) $A \cup C$	(iii) $C - B$	(v) $C^c \cap A$	(vii) $(A - B^c)^c$
(ii) $B \cap A$	(iiii) $B^c \cup C$	(vi) $(A - C)^c$	(viii) $(A \cup A^c)^c$

8. Sean V y W conjuntos no vacios. Considerando los cuatro casos posibles para dos conjuntos no vacios, represente mediante diagramas de Venn: (i) $W - V$, (ii) $V^c \cup W$, (iii) $V \cap W^c$, y (iiii) $V^c - W^c$.

9. Representar mediante diagramas de Venn las siguientes situaciones:

(i) $A \subset B$, $C \subset B$, $A \cap C = \varnothing$	(iii) $A \subset C$, $A \neq C$, $B \cap C = \varnothing$
(ii) $A \subset B$, $C \not\subset B$, $A \cap C \neq \varnothing$	(iiii) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $A \neq C$.

10. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3, 4, c\}$. Encontrar:

(i) $A \times (B \cup C)$	(iii) $A \times (B \cap C)$
(ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$	(iiii) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

11. ¿Cuándo es $A \times B = B \times A$? ¿Qué conjunto es $A \times \varnothing$?

12. Dados $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c\}$ determine:

$$\text{(i) } \mathcal{P}(A), \quad \text{(ii)}\mathcal{P}(B), \quad \text{(iii)}\mathcal{P}(A \cap B), \quad \text{(iiii) } \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)).$$

13. Sea A un conjunto finito. Una colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no vacíos es una *partición* de A si $A_i \cap A_j = \varnothing$, siempre que $i \neq j$, y $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$. Por ejemplo, $\{\{a, c\}, \{b, d, e\}\}$ es una partición de $A = \{a, b, c, d, e\}$, y $\{\{a, b\}, \{d, e\}, \{c\}\}$ es otra partición del mismo conjunto A. Determine todas las particiones del conjunto $\{a, b, x\}$.

2 Inducción Matemática y Binomio de Newton

1. En cada caso, exprese la suma o producto dado con la notación sumatoria o productoria (según el caso):

   (a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 8^2$,

   (b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - 8^2$,

   (c) $(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1) \cdots (8^2 + 1)$,

   (d) $(1^3 - 1) + (2^3 + 1) + (3^3 - 1) + \cdots + (17^3 - 1)$,

   (e) $(2^2 - 1)(3^2 + 1)(4^2 - 1) \cdots (12^2 - 1)$,

   (f) $(1 - r)(1 - r^3)(1 - r^5) \cdots (1 - r^{101})$,

   (g) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{15}{16!}$,

   (h) $n + \dfrac{n-1}{2!} + \dfrac{n-2}{3!} + \cdots + \dfrac{n-12}{13!}$.

2. Dado que $n > 1$, cuál de las siguientes representaciones suma o producto es **errónea**?

   (a) $(2^2 + 1)(3^2 + 1) \cdots (n^2 + 1) = \displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left[(i+1)^2 - 2i\right]$,

   (b) $(1^3 - 1)(2^3 - 2) + \cdots + (n^3 - n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left[(n-i)^3 - (n-i)\right]$,

   (c) $(1 - r)(1 - r^2)(1 - r^3) \cdots (1 - r^n) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - r^{n-i}\right)$,

   (d) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{n-1}{n!} = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \dfrac{i-1}{i!}$,

   (e) $k + (k-1) + (k-2) + \cdots + (k-n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (k - i + 1)$.

3. En cada caso dé una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión indicada. Asegúrese de especificar el valor inicial para n :

   (a) $1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \cdots$

   (b) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \cdots$

   (c) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$

   (d) $2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

   (e) $0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots.$

4. Calcular:
$$9!, \quad 10!, \quad 11!, \quad \frac{16!}{14!}, \quad \frac{14!}{11!}, \quad \frac{8!}{10!}, \quad \frac{10!}{13!}.$$

5. Escribir en términos de factoriales:
$$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21, \quad \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}, \quad 42.$$

6. Simplificar:
$$\frac{(n+1)!}{n!}, \quad \frac{n!}{(n-2)!}, \quad \frac{(n-1)!}{(n+2)!}, \quad \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}.$$

7. Demostrar por inducción:

   (a) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo entero $n \geq 1$.

   (b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo entero $n \geq 1$.

   (c) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, para todo entero $n \geq 1$.

   (d) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, para todo entero $n \geq 1$.

   (e) $\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, para todo número real $r \neq 1$ y todo entero $n \geq 1$.

   (f) $\sum_{j=1}^{n} (4j - 3) = n(2n - 1)$, para todo entero $n \geq 1$.

   (g) $\sum_{j=2}^{n} (j - 1)j = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, para todo entero $n \geq 2$.

   (h) $\sum_{j=1}^{n} (3j - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$, para todo entero $n \geq 1$.

(i) $\sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} = 1 + (n-1)2^n$, para todo entero $n \geq 1$.

(j) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j = \frac{(-1)^n - 1}{2}$, para todo entero $n \geq 1$.

(k) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo entero $n \geq 1$.

(l) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, para todo entero $n \geq 1$.

(m) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^3 = n^2(2n^2-1)$, para todo entero $n \geq 1$.

(n) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} j^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$, para todo entero $n \geq 1$.

(o) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$, para todo entero $n \geq 1$.

(p) $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, para todo entero $n \geq 2$.

(q) $\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{2i+2} = \frac{1}{(2n+2)!}$, para todo entero $n \geq 0$.

(r) $\sum_{k=t}^{n} a^k = \left(\frac{a^{n+1} - a^t}{a-1}\right)$, para todo entero $n \geq t$ y $a \neq 1$.

8. Vamos a probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} Q(i) = n^2(n+1)$. ¿Para cuál elección de $Q(i)$ funciona la inducción?:

   (a) $Q(i) = 3i^2 - 2$,

   (b) $Q(i) = 2i^2$,

   (c) $Q(i) = 3i^3 - i$,

   (d) $Q(i) = i(3i-1)$,

   (e) $Q(i) = 3i^3 - 7i$.

9. Demuestre usando inducción que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)\pi$.

10. Demuestre usando inducción que si un conjunto A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

11. (Las fórmulas para $S_n(m) = \sum_{k=1}^{n} k^m$) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y m entero no negativo colocamos

$$S_n(m) = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} S_n(0) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0, \\ S_n(1) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1, \\ S_n(2) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2, \end{aligned}$$

etc.

La siguiente fórmula recursiva permite calcular $S_n(m)$ a partir de las fórmulas anteriores $S_n(0) = n$, $S_n(1)$, $S_n(2), \ldots, S_n(m-1)$:

Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ vale:

$$(m+1)S_n(m) = (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_n(k). \tag{1}$$

Compruebe que esta fórmula es válida para $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$ (son las fórmulas (a), (b) y (c) del ejercicio anterior).

Demuestre la validez de la fórmula (1) usando inducción sobre m.

12. Considere la siguiente proposición que depende de n

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Demuestre:

(i) Si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es verdadera, para todo k natural.

(ii) $P(n)$ es falsa para todo n natural.

13. Descubrir la fórmula para

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

usando su relación con la suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

y luego demostrar su validez usando inducción.

14. Descubrir la fórmula para

$$\sum_{k=1}^{n} (1 + 2 + \cdots + k)$$

y luego demostrar su validez usando inducción.

15. Una **progresión aritmética** con primer término a_1 y razón r es una sucesión a_1, a_2, ... de números cuyo primer elemento es a_1 y tal que el elemento a partir del segundo es igual al anterior más la razón. Simbólicamente, si $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + r$.

    (i) Muestre por inducción sobre n que

    $$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

    (ii) Si $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, muestre por inducción sobre n que

    $$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

16. Deduzca de la parte (ii) del ejercicio anterior la fórmula para

    $$1 + 2 + \cdots + n.$$

17. Una **progresión geométrica** con primer elemento a_1 y razón q, ($q \neq 0$ y $q \neq 1$) es una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de números cuyo primer término es a_1 y tal que, cada elemento, a partir del segundo, es igual al anterior multiplicado por la razón. Simbólicamente, si $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1}q$.

    (i) Demuestre por inducción sobre n que

    $$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

    (ii) Si $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, muestre por inducción sobre n que

    $$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}.$$

18. Deduzca de la parte (ii) del ejercicio anterior la fórmula para

    $$r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^n, \text{ con } r \neq 1.$$

19. Calcular:

    $$\binom{5}{2}, \quad \binom{7}{3}, \quad \binom{14}{2}, \quad \binom{6}{4}, \quad \binom{20}{17}, \quad \binom{18}{15}.$$

20. Mostrar (sin usar la relación de Stiefel) que

    $$\binom{12}{8} = \binom{11}{7} + \binom{11}{8}.$$

21. Demuestre que los coeficientes binomiales satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

    $$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1, \\ \binom{n}{k+1} &= \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}, \quad k=0,1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

22. Demuestre la relación de Stiefel: para $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

23. Demostrar que para $n \geq 2$, se tiene que:

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2.$$

24. Demuestre, usando inducción, la fórmula de Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

para a, b números enteros y $n = 1, 2, 3 \ldots$.

25. Desarrollar y simplificar:

$$(2x+y^2)^3, \quad (x^2-3y)^4, \quad (\tfrac{1}{2}a+2b)^5, \quad (2a^2-b)^6.$$

26. La octava fila del triángulo de Pascal es como sigue:

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

Calcular la novena y décima fila del triángulo.

27. Encontrar en el desarrollo de

$(2x^2 - \frac{1}{2}y^3)^8$	el término que contiene	x^8
$(3xy^2 + z^2)^7$	el término que contiene	y^6
$(2x^2 - y^3 + \frac{1}{2}z)^7$	el término que contiene	x^4 y z^4
$(xy - y^2 + 2z)^6$	el término que contiene	x^3 y y^5.

28. Usando la fórmula del Binomio de Newton, muestre que

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(ii) $\displaystyle\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

29. Deduzca de la parte (i) del ejercicio anterior que si A es un conjunto con n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

30. Demuestre, usando la fórmula de Binomio de Newton, que

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k,$$

para a, b números enteros y $n = 1, 2, 3 \ldots$.

3 Números Enteros y Divisibilidad

1. (**Consecuencias de los primeros 10 axiomas de los números enteros**). Demuestre que para todo a, b y c números enteros,

   (a) $0 \cdot a = 0$,

   (b) $-(-a) = a$,

   (c) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$,

   (d) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$,

   (e) $a + b = a + c$ implica $b = c$,

   (f) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$,

   (g) Si $a^2 = a$, entonces $a = 0$ ó $a = 1$,

   (h) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

   (i) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

2. (**Propiedades de la divisibilidad**) Si a, b y c son enteros, entonces:

   (a) $a \mid a$.

   (b) Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.

   (c) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b - c)$.

   (d) Si $a \mid b$, entonces $ac \mid bc$.

   (e) Si $na \mid nb$ y $n \neq 0$, entonces $a \mid b$.

   (f) $1 \mid a$.

   (g) Si $a \mid 1$, entonces $a = \pm 1$.

   (h) $a \mid 0$,

   (i) Si $0 \mid a$, entonces $a = 0$.

3. Demuestre que si n es un entero, entonces el único divisor positivo de n y $n + 1$ es 1.

4. Sean a, b, c tres enteros con $c \neq 0$. Demuestre que $a \mid b$, si y sólo si, $ac \mid bc$.

5. ¿Qué se puede concluir sobre enteros a y b no nulos tales que $a \mid b$ y $b \mid a$?

6. Si b_k es entero y $a \mid b_k$, $k = 1, \ldots n$, entonces $a \mid \left(\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right)$, con x_k entero, $k = 1, \ldots, n$. ($\sum_{k=1}^{n} x_k b_k$, se llama **combinación lineal de los** b_k).

7. Demuestre usando el Principio de Inducción Matemática que $8 \mid (9^n - 1)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

8. En lo sucesivo F_n denotará el n-ésimo término de la **Sucesión de Fibonacci**, definida recursivamente por $F_1 = F_2 = 1$, y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 1$. Así los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son:

   $$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots.$$

   Demuestre que $F_n \mid F_{kn}$, para k y n números naturales.

9. Hallar c y r en la división euclideana ($D = d \cdot c + r$, con $0 \leq |r| < d$) cuando:

   (a) $D = 671$, $d = 9$,

   (b) $D = -671$, $d = 9$,

   (c) $D = 671$, $d = -9$,

   (d) $D = -671$, $d = -9$,

   (e) $D = -671$, $d = 19$,

   (f) $D = 671$, $d = -19$,

   (g) $D = 671$, $d = 19$,

   (h) $D = 19$, $d = -671$,

   (i) $D = 19$, $d = -671$,

   (j) $D = 1934$, $d = -62390$.

10. Usando la división euclidiana muestre que todo número entero es de la forma $2n$ o $2n + 1$, con n entero. Los números de la forma $2n$ son llamados **pares** y los de la forma $2n + 1$ son llamados **impares**. Muestre que:

    (a) La suma de números pares es par.

    (b) La suma de dos impares es par.

    (c) La suma de un par y un impar es impar.

    (d) El producto de dos números es par, si uno de ellos es par.

    (e) El producto de dos impares es impar.

    (f) De dos enteros consecutivos, uno de ellos es par.

11. Sea a un número entero. Muestre que

    (a) Si a^2 es par, entonces a es par.

    (b) Si a^2 es divisible por 3, entonces a es divisible por 3.

12. Demuestre (en los tres items k es un entero):

    (a) El producto de dos enteros de la forma $6k + 5$ es un entero de la forma $6k + 1$,

    (b) El cuadrado de un entero impar es de la forma $8k + 1$,

    (c) El cubo de un entero es de una de las formas: $9k - 1$, $9k$, ó $9k + 1$.

13. Muestre que para todos los enteros n, el número $n^3 - n$ tiene a 3 como factor (considere 3 casos: $n = 3k$, $n = 3k + 1$ y $n = 3k + 2$ ó use inducción).

14. Demuestre que $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

15. Demuestre que el producto de cualesquiera n números naturales consecutivos es divisible por $n!$.

16. (**Notación** $a \bmod b = r$) Para $b > 0$ se define $a \bmod b = r$, donde r es el resto dado por la división Euclidiana cuando a es dividido por b, esto es $a = bq + r$, y $0 \leq r < |b|$. Por ejemplo $23 \bmod 7 = 2$, puesto que $23 = 7 \cdot 3 + 2$ y $-4 \bmod 5 = 1$, puesto que $-4 = 5 \cdot (-1) + 1$.

    (a) Demuestre que si $b > 0$, entonces $b \mid a$ si, y sólo si, $a \bmod b = 0$.

    (b) Demuestre que si $b \neq 0$, entonces $b \mid a$ si, y sólo si, $\dfrac{a}{b}$ es un entero.

    (c) Determine:

        i. $0 \bmod 10$.
        ii. $123 \bmod 10$.
        iii. $10 \bmod 123$.
        iv. $457 \bmod 33$.
        v. $(-7) \bmod 3$.
        vi. $(-3) \bmod 7$.
        vii. $(-5) \bmod 5$.

17. Demuestre que el máximo común divisor de un par de números es único.

18. Demuestre que si $a \mid b$, entonces $(a, b) = |a|$.

19. Demuestre que si $m > 0$, entonces $(ma, mb) = m(a, b)$.

20. Demuestre que $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$.

21. Demuestre que si $a \mid bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

22. Demuestre que si $a \mid m$, $b \mid m$ y $(a, b) = 1$, entonces $ab \mid m$. Muestre que no es cierto si $(a, b) \neq 1$ mediante un contraejemplo.

23. Muestre que el producto de tres enteros consecutivos tiene a 6 como factor.

24. Demuestre que si p es primo y a es un entero, entonces $(a, p) = 1$ ó p.

25. Dado un entero n, muestre que

    (a) $(n, 2n + 1) = 1$,

    (b) $(2n + 1, 3n + 1) = 1$,

26. Demuestre que (a, b) es el divisor positivo de a y b el cual es divisible por todo divisor común de a y b.

27. Hallar $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{Z}$ que cumplan cada una de las siguientes condiciones:

    (a) $a > 0, b > 0$,

    (b) $d = sa + tb$, y

    (c) $d \neq (a, b)$.

28. Demuestre que $(a, b) = 1$, si y sólo si, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = 1$.

29. Usando el algoritmo de Euclides, calcule (a, b). Encuentre los enteros x, y tales que $(a, b) = ax + by$.

    (a) $a = 542,\ b = 234$.

    (b) $a = 9652,\ b = 252$.

    (c) $a = 4276,\ b = 1234$.

    (d) $a = 1819,\ b = 3587$.

    (e) $a = -1897,\ b = 3587$.

30. Demuestre que todo múltiplo común de a y b es múltiplo de $[a, b]$.

31. Descomponer en factores primos:

    (a) 2579

    (b) 181429

    (c) 397703

    (d) 5609239

    (e) 1111

    (f) 11111

    (g) 111111

    (h) 1111111

32. Si dos enteros poseen factorizaciones

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \\ b &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \end{aligned}$$

    entonces

$$(a, b) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k},$$

    donde $c_i = \min\{\alpha_1, \beta_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.

33. Si dos enteros poseen factorizaciones

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \\ b &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \end{aligned}$$

    entonces

$$[a, b] = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k},$$

    donde $d_i = \max\{\alpha_1, \beta_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.

34. Si $m > 0$, entonces $[ma, ma] = m[a, b]$.

35. Demuestre que si a y b son enteros positivos, entonces

$$(a, b)[a, b] = ab.$$

36. Calcule $[a, b]$ para los siguientes:

    (a) $a = 1960,\ b = 1118.$

    (b) $a = 3845,\ b = 2125.$

    (c) $a = 1650,\ b = 7800.$

    (d) $a = 235,\ b = 7655.$

    (e) $a = 23005,\ b = 74565.$

37. Determine la expresión del entero m en la base b, para los siguientes:

    (a) $m = 237809,\ b = 5$

    (b) $m = 5467,\ b = 8$

    (c) $m = 1124,\ b = 2$

    (d) $m = 31008,\ b = 6$

    (e) $m = 874,\ b = 3$

    (f) $m = 4569,\ b = 9$

    (g) $m = 4569,\ b = 11$

    (h) $m = 23001,\ b = 2$

38. Dé la expresión en base 10 de los siguientes números:

    (a) $(245760)_8$,

    (b) $(123021)_4$,

    (c) $(1000010)_2$

    (d) $(1423404)_5$,

    (e) $(1423404)_6$,

    (f) $(10603104)_7$.

39. (a) Si $x = (120212)_3$, calcule $(x)_5$.

    (b) Si $x = (64501)_7$, calcule $(x)_2$.

    (c) Si $x = (1548)_9$, calcule $(x)_4$.

40. Resolver en x :

    (a) $(124)_5 = (x)_9$,

    (b) $(132)_x = (330)_5$

41. Demuestre que para $m \geq 3$ se tiene que $(121)_m = (m+1)^2$.

42. Demuestre los siguientes criterios de divisibilidad:

    (a) "Un número es divisible por 2 si, y sólo si, su último dígito es par"

    (b) "Un número es divisible por 3 si, y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 3"

    (c) "Un número es divisible por 4 si, y sólo si, el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible por 4"

    (d) "Un número es divisible por 5 si, y sólo si, su último dígito es 0 ó 5"

    (e) "Un número $m = 10k + j$ es divisible por 7 si, y sólo si, $k - 2j$ es divisible por 7"

    (f) "Un número es divisible por 9 si, y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 9"

    (g) "Un número es divisible por 10 si, y sólo si, su último dígito es cero".

43. Demuestre:

    (a) Si a es impar, entonces $24 \mid a(a^2 - 1)$,

    (b) Si a y b son impares, entonces $8 \mid (a^2 - b^2)$.

44. Sea a un número entero y n un número natural. Demuestre que $(a-1) \mid (a^n - 1)$:

    (a) Usando el ejercicio 7(e) de la sección 2,

    (b) Por inducción sobre n,

    (c) Usando la fórmula del binomio de Newton.

45. Demuestre que si $m \mid n$, entonces, para todo $a \neq \pm 1$, se tiene que $(a^m - 1) \mid (a^n - 1)$.

46. Sea q un entero. Determine:

    (a) (q, q^2),

    (b) $(q, q+1)$,

    (c) $(q, q+2)$.

47. Demuestre que $(a, a+n) = (a, n)$.

48. Demuestre que un número escrito en base 8 es divisible por 7, si y sólo si, la suma de sus dígitos es múltiplo de 7.

49. Demuestre que si n es entero, entonces $6 \mid (n^3 - n)$.

50. Sea $\{F_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión de Fibonacci.

    (a) Demuestre que $(F_n, F_{n+1}) = 1$,

    (b) Halle enteros x e y tales que $xF_n + yF_{n+1} = 1$,

    (c) Demuestre que $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$.

4 Congruencias y Aritmética Modular

1. Demuestre que la relación congruencia módulo n es

   (a) Simétrica: $a \equiv a \bmod n$.

   (b) Reflexiva: $a \equiv b \bmod n$ si, y sólo si, $b \equiv a \bmod n$.

   (c) Transitiva: $a \equiv b \bmod n$ y $b \equiv c \bmod n$, entonces $a \equiv c \bmod n$.

2. Si $a \equiv b \bmod n$, $c \equiv d \bmod n$ y m un entero, demuestre:

   (a) $ma \equiv mb \bmod n$.

   (b) $a + c \equiv b + d \bmod n$.

   (c) $ac \equiv bd \bmod n$.

3. Demuestre que si $a \equiv b \bmod n$ y k es un divisor de n, entonces $a \equiv b \bmod k$.

4. Demuestre que si $a \equiv b \bmod n$ y m un entero positivo, entonces $a^m \equiv b^m \bmod n$.

5. Demuestre que la suma y el producto en $\mathbb{Z}_n$ estan bien definidos, es decir, si

   $$\overline{a} = \overline{a'}$$

   y

   $$\overline{b} = \overline{b'},$$

   entonces

   $$\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$$

   y

   $$\overline{ab} = \overline{a'b'}.$$

6. Demuestre que para todo $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ en $\mathbb{Z}_n$

   (a) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

   (b) $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$.

   (c) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

   (d) $\overline{a}(\overline{b}\overline{c}) = (\overline{a}\overline{b})\overline{c}$.

   (e) $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$.

   (f) $\overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$.

   (g) $\overline{1}\overline{a} = \overline{a}$.

7. Demuestre que si $ab \equiv ac \bmod n$ y $(a, n) = 1$, entonces $b \equiv c \bmod n$.

8. Demuestre que para cualquier entero n se verifica:

$$n^2 \equiv 0 \bmod 8$$

ó

$$n^2 \equiv 1 \bmod 8$$

ó

$$n^2 \equiv 2 \bmod 8.$$

9. Demuestre las siguientes propiedades:

   (a) Si $a \equiv b \bmod n_1$ y $a \equiv b \bmod n_2$, entonces $a \equiv b \bmod (n_1, n_2)$,

   (b) Si $a \equiv b \bmod n_1$ y $a \equiv c \bmod n_2$, entonces $b \equiv c \bmod (n_1, n_2)$,

   (c) Si $a \equiv b \bmod n$, entonces $(a, n) = (b, n)$,

   (d) Si $a \equiv b \bmod n$, y d divide a: a, b y n, entonces $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \bmod \frac{n}{d}$.

10. Elabore las tablas de suma y producto en: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$.

11. En $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, obtenga dos clases distintas de cero tal que su producto es cero. Observe que esto no es posible en $\mathbb{Z}_3$ ni en $\mathbb{Z}_5$.

12. En $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, para cada elemento $\overline{a}$ en $\mathbb{Z}_5$, encuentre $\overline{b}$ tal que $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$.

13. Demuestre que si $(a, n) = 1$, entonces existe $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$.

14. Sea n un número compuesto. Consiga dos clases distintas de cero en $\mathbb{Z}_n$ tal que su producto sea cero.

15. Sea p un número primo. Demuestre que para cada $\overline{a}$ en $\mathbb{Z}_p$, existe $\overline{x}$ tal que $\overline{ax} = \overline{1}$. Deduzca de este hecho que no es posible encontrar dos clases distintas de cero en $\mathbb{Z}_p$ tal que su producto sea cero.

16. Demuestre que n es un número primo si, y sólo si, en $\mathbb{Z}_n$, $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$ implica que $\overline{a} = \overline{0}$ ó $\overline{b} = \overline{0}$.

17. Demuestre, **usando congruencias**, los siguientes criterios de divisibilidad:

   (a) "Un número es divisible por 2 si, y sólo si, su último dígito es par"

   (b) "Un número es divisible por 3 si, y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 3"

   (c) "Un número es divisible por 4 si, y sólo si, el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible por 4"

   (d) "Un número es divisible por 5 si, y sólo si, su último dígito es 0 ó 5"

   (e) "Un número es divisible por 9 si, y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 9"

   (f) "Un número es divisible por 10 si, y sólo si, su último dígito es cero".

5 Números Racionales

1. Demuestre que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con la adición y la multiplicación "verifica los mismos axiomas 1. a 9. que verifican los números enteros para la adición y la multiplicación".

2. Demuestre que las operaciones de adición y multiplicación en $\mathbb{Q}$ están bien definidas, es decir, si
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$
y
$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'},$$
entonces
$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a' \cdot d' + b' \cdot c'}{b' \cdot d'}$$
y
$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a' \cdot c'}{b' \cdot d'}.$$

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $c \neq 0$. Demuestre que:
   (a) $a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$,
   (b) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$,
   (c) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$,
   (d) $\frac{b \cdot c}{c} = b$,
   (e) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$,
   (f) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

4. Sean $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{8}{7}$ y $z = \frac{-3}{5}$. Determine:
$$x + y, \quad y + z, \quad xy, \quad y(x + z), \quad yx + yz, \quad (x + y)z.$$

5. Sean $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{9}{7}$ y $z = \frac{-3}{5}$. Determine:
$$\frac{y}{x}, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{y}{z}, \quad \frac{z}{y}, \quad yx + yz, \; (x + y)z.$$
$$\frac{y}{1 - 2x}, \quad \frac{x^2 - 1}{z + 3}, \quad \frac{y}{z + y}, \quad \frac{1 + z}{2y - x}, \quad \frac{1}{yx + yz}, \; 1 - \frac{2}{(x + y)z}.$$

6 Números Reales

1. (**Consecuencias de los axiomas de cuerpo de los números reales**). Demuestre que para todo a, b y c números reales, se tiene:

   (a) $0 \cdot a = 0$.

   (b) $a \cdot b = 0$ implica $a = 0$ ó $b = 0$.

   (c) $-(-a) = a$.

   (d) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.

   (e) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

   (f) $a + b = a + c$ implica $b = c$.

   (g) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

   (h) Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. (**Consecuencias de los axiomas de orden de los números reales**). Demuestre que para todo a, b y c números reales, se tiene que:

   (a) $a < b$ y $b < c$ implica $a < c$.

   (b) $a < b$ y $c < d$ implica $a + c < b + d$.

   (c) $a < 0$ y $b < 0$ implica $a + b < 0$.

   (d) $0 < a$ implica $-a < 0$.

   (e) $a < 0$ y $b < 0$ implica $0 < a \cdot b$.

   (f) $a < 0$ y $0 < b$ implica $a \cdot b < 0$.

   (g) $0 < a$ y $b < c$ implica $ab < ac$.

   (h) $a < 0$ y $b < c$ implica $a \cdot c < a \cdot b$.

3. Represente gráficamente los siguientes conjuntos de números reales y halle su supremo, ínfimo, máximo y mínimo, en caso de que existan.

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$.

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x < \pi$ y x es entero $\}$.

   (c) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   (d) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0\right\}$.

   (e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = 0$ ó $x = \dfrac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}\right\}$.

   (f) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}$ y x es racional $\}$.

   (g) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 1\}$.

(h) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 3\} \cup [5, 2\pi]$.

(i) $\left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(j) $\left\{-1 - \frac{1}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se define el conjunto $-A$ por $-A = \{-a : a \in A\}$. Use esta definición para demostrar que si A es acotado inferiormente, entonces A posee ínfimo.

5. (**Propiedad Arquimediana**) Demuestre: si $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $y > 0$, entonces existe un entero positivo n tal que $nx > y$.

6. Demuestre que dado $\epsilon > 0$, existe un entero $n \leq 1$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

7. Demostrar que si un número real x satisface la desigualdad $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ para todo entero $n > 0$, entonces $x = 0$.

8. Sea x un número real, $x \geq 0$. Decimos que $r \geq 0$ es la raíz cuadrada de x, $r = \sqrt{x}$, si, y sólo si, $r^2 = x$. Tenemos que $\sqrt{x}$ está definida sólo si, $x \geq 0$. Demuestre que $\sqrt{a^2} = |a|$, para $a \in \mathbb{R}$, donde
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

9. Demuestre que $\sqrt{3}$ no es un número racional.

10. Determine la expresión decimal para los siguientes números racionales:
$$\frac{1}{12}, \quad \frac{34}{8}, \quad \frac{111}{5}, \quad \frac{4}{23}, \quad \frac{2341}{3}, \quad \frac{12}{13}, \quad \frac{12345}{6789}.$$

11. Halle la expresión racional de los siguientes números:

(a) $0,\overline{23}$

(b) $0,34\overline{4565}$

(c) $0,455$

(d) $-1,0002\overline{323}$

(e) $-1,000\overline{23}$

(f) $3,112\overline{12345}$

(g) $0,\overline{9}$

(h) $3,12\overline{034}$

12. Demuestre que $0,2334 = 0,2333\overline{9}$.

7 Números Complejos

1. Verifique los axiomas de cuerpo para números complejos: para todo z, w y r, números complejos, se tiene:

   (a) $z + w = w + z$.

   (b) $z + (w + r) = (z + w) + r$.

   (c) $0 + z = z$.

   (d) $z + (-z) = 0$.

   (e) $zw = wz$.

   (f) $z(wr) = (zw)r$.

   (g) $1 \cdot z = z$.

   (h) Si $z \neq 0$ existe z^{-1} tal que $zz^{-1} = 1$.

   (i) $z(w + r) = zw + zr$.

2. Represente gráficamente los siguientes números complejos:

   (a) $z = 3i + 2$

   (b) $z = 2 - 3i$

   (c) $z = \frac{1}{2}i$

   (d) $z = -(3i - 2)$

   (e) $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

   (f) $z = -1$

   (g) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   (h) $z = 3i$

   (i) $z = 2 - 2i$

   (j) $z = -2 + 2i$

3. Sean z y w números complejos. Demuestre:

   (a) $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

   (b) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

   (c) $\overline{\overline{z}} = z$.

   (d) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

   (e) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$.

   (f) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

   (g) Si $w \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

(h) $z\bar{z} = |z|^2$

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ y $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

(j) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

(k) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, y $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

(l) $|zw| = |z||w|$.

(m) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

4. Dados los números complejos: $z = 1+\sqrt{3}i$, $w = 3\sqrt{3}i - 2$ y $r = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$ calcule: $z+w-r$, zw, z^{-1}, w^{-1}, $\dfrac{z}{w}$, y $\dfrac{z}{wr}$.

5. Si n es un numero natural, demuestre que

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \equiv 0 \bmod 4 \\ i, & \text{si } n \equiv 1 \bmod 4 \\ -i, & \text{si } n \equiv 2 \bmod 4 \\ -1, & \text{si } n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

6. Represente gráficamente y exprese cada uno de los siguientes números de la forma $x+iy$:

(a) $3(\cos 0 + i \sin 0)$

(b) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$

(c) $\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi$

(d) $\frac{1}{2}(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi)$

7. Represente los siguientes números en la forma $x+iy$:

(a) $[3(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)]^5$

(b) $3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

(c) $3(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) \cdot 2(\cos \pi + i \sin \pi)$

(d) $(1+i)^8$

(e) $[2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})]^6$

(f) $[2(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)]^3$

(g) $(3i - \sqrt{3})^4$

8. Determine y represente gráficamente:

(a) Las raices sextas de i.

(b) Las raices cuartas de $-4 + 4\sqrt{3}i$.

(c) Las raices cuadradas de $-16i$.

(d) Las raices cúbicas de -8.

(e) Las raices quintas de $4 - 4\sqrt{3}i$.

(f) Las raices octavas de 1.

(g) Las raices décimas de 1.

9. Resuelva las siguientes ecuaciones expresando las raices en la forma $x + iy$ y represéntelas gráficamente:

   (a) $z^5 = 64$

   (b) $z^4 = 1$

   (c) $z^3 - i = 0$

   (d) $z^5 + 32 = 0$

   (e) $z^2 + 1 = i$

10. Determinar:
$$\sqrt{i}, \qquad \sqrt{i-1}, \qquad \sqrt[4]{i}, \qquad (-8)^{\frac{1}{3}},$$
$$(3-4i)^{\frac{1}{8}}, \qquad (1+i)^8, \qquad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{25}, \qquad \sqrt[4]{-1}.$$

11. Resolver $\bar{z} = z^{n-1}$.

12. ¿Para qué valores de n es i una raíz n-ésima de la unidad?

13. Simplifique:
$$i^{11}, \qquad i^{37}, \qquad \frac{1}{i^{15}}, \qquad (i^4 + i^3 - i^2 + 1)^2, \qquad (i-1)^2 - (i+1)^2 + i^4.$$

14. Muestre que
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$
para $n \in \mathbb{Z}$.

15. Represente en forma trigonométrica:
$$-5, \qquad 5i, \qquad -2-2i, \qquad \sqrt{2}+i\sqrt{2},$$
$$1+i\sqrt{3}, \qquad 3\sqrt{3}+3i, \qquad (1-i)(-1+\sqrt{3}i), \qquad (1+i)^n.$$

16. Demuestre que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z\bar{w} + \bar{z}w \in \mathbb{R}$.

17. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones:
$$x^2 + 9 = 0, \qquad 3x^2 + 2 = 0, \qquad 2x^2 + 7 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 7 = 0, \qquad 4x^2 - 4x = -5, \qquad 5x^2 - 6x + 2 = 0.$$

18. Resuelva:
$$(2-5i)z = 1, \qquad (1-2i)z + 3 = 0, \qquad (1+i)z - (1-i) = 4,$$
$$z - \bar{z} = 4i, \qquad z + \tfrac{1}{z} = 0, \qquad z^2 + iz - 1 = 0.$$