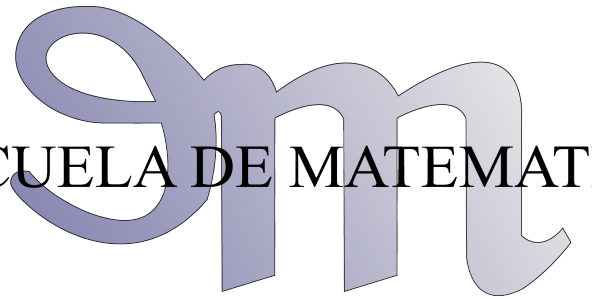


Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Guías Matemática II

PROF. OLIVER RAMOS.

Cálculo Diferencial e Integral en una variable.
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.



ESCUELA DE MATEMATICA

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía I
Continuidad y derivabilidad

1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones, en caso de que sean discontinuas clasifique sus discontinuidades.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 \text{ si } x < 4 \\ x^2 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } 0 \leq x < 2 \\ x \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4}{5} \text{ si } x \leq 0 \\ x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ si } x < 4 \\ 2x - 6 \text{ si } x > 4 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } |x - 3| \leq 2 \\ 2 \text{ si } |x - 3| > 2 \end{cases}$

h. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

i. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 \text{ si } x \leq 2 \\ 4 - x \text{ si } x > 2 \end{cases}$

j. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

k. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ si } x < 2 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ x - 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

l. $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } |x| \leq 1 \\ x^2 \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$

m. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} \text{ si } x \neq 5 \\ 10 \text{ si } x = 5 \end{cases}$

n. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 3}{x^3 + 27} \text{ si } x \neq -3 \\ 27 \text{ si } x = -3 \end{cases}$

ñ. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(|x + 1|) \text{ si } |x - 2| \leq 1 \\ -1 \text{ si } |x - 2| > 1 \end{cases}$

o. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 5} \text{ si } x \leq 2 \\ x - 5 \text{ si } 2 < x < 5 \\ x^2 - 25 \text{ si } x > 5 \\ 10 \text{ si } x = 5 \end{cases}$

Contenido: Continuidad y derivabilidad.

p. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

q. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 5 - 4x \text{ si } 1 < x < 2 \\ 4 \text{ si } x = 2 \end{cases}$

r. $f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) \text{ si } |x| < 1 \\ x \text{ si } |x| \geq 1 \end{cases}$

s. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

2. En cada caso determine los valores de las constantes α y β para que las funciones dadas sean continuas en sus respectivos dominios.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 4} \text{ si } x > 2 \\ \beta \text{ si } x = 2 \\ x + \alpha \text{ si } x < 2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \alpha^2}{x - \alpha} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha^2 \text{ si } x = 2 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \leq -2 \\ \alpha x^2 + 4 \text{ si } x > -2 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x < -1 \\ \alpha x + \beta \text{ si } -1 \leq x < 3 \\ 2 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } 1 < x < 3 \\ x^2 + \alpha x + \beta \text{ si } |x - 2| \geq 1 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{2\alpha\beta x}{5}\right) \text{ si } 0 < x < 5 \\ \ln(2) \text{ si } x = 5 \\ \ln\left(\dfrac{2\alpha^3\beta^2 x}{5}\right) \text{ si } x > 5 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x) \text{ si } x < 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \\ 2\operatorname{sen}(\alpha x) + \dfrac{3}{4}\cos(\alpha x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$

h. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha + 1} - \dfrac{x^2}{\beta - 1} \text{ si } 0 \leq x < 2 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ \dfrac{x^3}{2(\alpha + 1)} + \dfrac{x}{\beta - 1} \text{ si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

i. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cos(x)}{\sqrt{2}(\alpha + \beta)} - \sqrt{2}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\alpha - \beta} \text{ si } 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ 2 \text{ si } x = \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{8x}{\pi(\alpha + \beta)} - \dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}(\alpha - \beta)} \text{ si } x \geq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

j. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{\alpha\beta x}{3}\right) \text{ si } 0 < x < 3 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ \ln\left(\dfrac{\alpha^2\beta^2 x}{3}\right) \text{ si } x > 3 \end{cases}$

3. ¿Cómo debe definirse la función $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 25}}$ en $x = 5$ para que la función resultante sea continua en ese punto?

4. Sea f una función tal que su dominio es $\mathbb{R}$ y además $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, sabiendo que f es continua en el origen, demuestre que f es continua en $\mathbb{R}$.

Contenido: Continuidad y derivabilidad.

5. Sea f una función tal que su dominio es $\mathbb{R}$ y además $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, sabiendo que f es continua en el origen, demuestre que f es continua en $\mathbb{R}$.

6. Sea $\phi(x) = \begin{cases} -3\psi(0) \text{ si } x = 0 \\ \\ \psi^2(x) - 2\varphi(x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$ Es conocido que la función ψ es continua en el origen y además que $\lim\limits_{x \to 0^-} \psi(x) = 3$, ¿Qué condiciones debe cumplir la función φ para que la función ϕ sea continua en el origen?

7. Demuestre que la siguiente función es discontinua en $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 \text{ si } x < 3 \\ \\ 8 \text{ si } x = 3 \\ \\ -x + 10 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

   En caso de ser posible, redefina a $f(x)$ de manera que sea continua en $x = 3$.

8. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ Diga si f es diferenciable en el origen.

9. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en su dominio

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x > 0 \\ \\ 1 + x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

10. Hallar los valores de las constantes α y β para que las siguientes funciones sean derivables en todo su dominio

    a. $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta \text{ si } x < 1 \\ \\ \sqrt[3]{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

    b. $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1 \text{ si } x \leq 1 \\ \\ \sqrt{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

    c. $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta \text{ si } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{|x|} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

    d. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta \text{ si } x \geq 2 \\ \\ 3\alpha x - \beta \text{ si } x < 2 \end{cases}$

11. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 1$ que pasa por el punto $A(-1, 2)$.

12. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 6x + 5$ que pasa por el punto $B(-3, -5)$.



"Cogito ergo sum"
René Descartes
LaTeX

Contenido: Continuidad y derivabilidad.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía II
Límites por definición
PRIMERA PARTE

1. Demuestre los siguientes límites haciendo uso de la definición formal

a. $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x-3}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

c. $\lim\limits_{x\to 5}x=5$

d. $\lim\limits_{x\to 3}(4x)=12$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

f. $\lim\limits_{x\to 8}(6)=6$

g. $\lim\limits_{x\to -1}(x+6)=5$

h. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+4)=4$

i. $\lim\limits_{x\to 1}(9-6x)=3$

j. $\lim\limits_{x\to \pi}(e)=e$

k. $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$

l. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}(2x)=-1$

m. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2)=0$

n. $\lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{2x}=0$

ñ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x-2}=1$

o. $\lim\limits_{x\to 0}3x^3=0$

p. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}8\,(2x+5)=48$

q. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$

r. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{3x}=\dfrac{1}{9}$

s. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=-3$

t. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-6x+1\right)=1$

u. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$

v. $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2-10x+25\right)=0$

w. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+x-6\right)=6$

x. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+7x+1\right)=9$

y. $\lim\limits_{x\to -5}\left(x^2+3x\right)=10$

z. $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt[3]{x+1}=2$

α. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[2]{x-1}+1\right)=0$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

δ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{3x}=\dfrac{2}{3}$

ε. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2}$

ζ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

η. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

2. Escriba la definición formal de los siguientes límites

a. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$

b. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=M$

3. Si $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\leq 0 \\ \\ x \text{ si } x>0 \end{cases}$ Demuestre por medio de la definición formal de límite que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

4. Si $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 \text{ si } x\leq 2 \\ \\ 3-2x \text{ si } x>2 \end{cases}$ Demuestre por medio de la definición formal de límite que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1$.

5. Haciendo uso de la definición formal, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|+1}=1$.

Contenido: Definición formal de Weierstrass para límites.

6. Probar que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.
   Sugerencia: Aplique la siguiente desigualdad $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$.

7. Demuestre con un contraejemplo que el recíproco de la proposición anterior no es cierto.

8. Una función f es **continua en un punto a** si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, escriba esta definición de continuidad aplicando la definición formal de límite.

9. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ y $c \in \mathbb{R}$ demuestre que

   a. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim_{x\to a} f(x) = cL$
   b. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$
   c. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L + M$

10. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, demuestre que existen $\delta > 0$ y $K > 0$ tales que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x)| < K$.

11. Si $\lim_{x\to a} g(x) = M$, demuestre que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|g(x)| > \dfrac{|M|}{2}$

12. Demuestre que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

    a. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = LM$.
    b. $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{M}$, si $M \neq 0$.
    c. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$.

    Sugerencia: Aplique los ejercicios 10 y 11.

13. Dé una definición $\varepsilon - \delta$ para $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$.

14. Haciendo uso de la definición dada en el ejercicio 13, demuestre que

    a. $\lim_{x\to 0}(3x + 1) \neq 0$
    b. $\lim_{x\to 1} x^2 \neq -1$
    c. $\lim_{x\to \frac{7}{2}} 4 \neq \pi$

15. Escriba de la forma $\lim_{x\to a} f(x) = L$ cada una de las siguientes proposiciones:

    a. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ entonces $|x + 1 - 1| < \varepsilon$.
    b. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - \pi| < \delta$ entonces $|\cos(x) + 1| < \varepsilon$.
    c. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $|x^2 - 9| < \varepsilon$.
    d. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|x^2 + 3x + 4 - 8| < \varepsilon$.

e. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $\left|\dfrac{3-x}{x-2}\right| < \varepsilon$.

f. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |y-m| < \delta$ entonces $|\phi(y) - K| < \varepsilon$.

g. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < x+1 < \delta$ entonces $||x| - 1| < \varepsilon$.

h. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $2 - x < \delta$ entonces $\left|\sqrt{x+1} - \sqrt{3}\right| < \varepsilon$.

i. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $2 - \delta < x < 2 + \delta$ entonces $2 - \varepsilon < \sqrt[3]{x^2+4} < 2 + \varepsilon$.

16. Se sabe que para todo $\delta > 0$, existe un $\varepsilon > 0$ y un x, tal que $|x-(-1)| < \delta$ y $\left|x^2 - 1\right| \geq \varepsilon$, basado en esta información ¿Qué se puede decir sobre el valor del $\lim\limits_{x \to -1} x^2$?

17. Demuestre que si el límite de una función en un punto existe, entonces éste es único.

18. Supongase que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Demuestre que la definción formal de límite se puede escribir de la siguiente manera:

    Para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $f\left((a-\delta, a+\delta) - \{a\}\right) \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$



"Un matemático no es digno de ese nombre si no es un poco poeta"
Karl Weierstrass
LaTeX

Contenido: Definición formal de Weierstrass para límites.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía II
Límites por definición
SEGUNDA PARTE

1. Demuestre los siguientes límites haciendo uso de la definición formal

   a. $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-3x+5)=23$

   b. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^4+5x^3+6x^2-4x\right)=8$

   c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{8+x}}=\dfrac{1}{3}$

   d. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[4]{x}-1)=0$

   e. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^3}=1$

   f. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Demuestre aplicando la definición de Weierstrass que

$$\lim_{x\to 4}(x^4+4x^3+3x^2-4x-4)=540$$

   Sugerencia: Aplique la desigualdad triangular al polinomio de tercer grado resultante luego de factorizar aplicando la ley de Ruffini.

3. Si $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 \text{ si } x\geq 1 \\ \sqrt[3]{x^2+7}+3 \text{ si } x<1 \end{cases}$ Demuestre por medio de la definición formal de límite que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=5$.

4. Si $f(x)=\begin{cases} x^2+7x-7 \text{ si } x\leq 1 \\ 3x-2 \text{ si } x>1 \end{cases}$ Demuestre por medio de la definición formal de límite que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

5. Haciendo uso de la definición formal, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$ y $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=24$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^4+2 \text{ si } 0\leq x\leq 1 \\ 2x+1 \text{ si } 1<x\leq 2 \\ x^3-3 \text{ si } 2<x\leq 3 \end{cases}$$

"Las matemáticas son la creación más bella y poderosa del espíritu humano"
Stefan Banach
LaTeX

Contenido: Definición formal de Weierstrass para límites.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía III
Aplicaciones del teorema de Rolle y Lagrange

1. Demuestre que la ecuación $x^5 + 3x^3 + x + 7 = 0$ tiene exactamente una raíz real.
2. Demuestre que la ecuación $x^7 - 10x + 6 = 0$ tiene a lo sumo tres raíces reales.
3. Demuestre que la ecuación $x^4 + 8x + 2 = 0$ tiene máximo dos raíces reales.
4. Demuestre que la ecuación $x^9 + 1 = 9x$ no puede tener más de tres raíces reales.
5. Demuestre que en el intervalo $[-1, 0]$ la ecuación $2e^x + 3x^9 = 0$ tiene solamente una raíz real.
6. Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = 2 - 4x$ tiene exactamente una raíz real en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
7. Demuestre que en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ la ecuación $3\tan(x) = 2 - x^2$ tiene exactamente una raíz real.
8. Sea $f(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ demuestre de dos maneras que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.
9. Determine el valor de las constantes α, β y γ para que las siguientes funciones satisfagan el teorema de Rolle y para los valores hallados determine los valores de c tales que $f'(c) = 0$.

   a. $f(x) = x^2 + 4x - 6$ si $x \in [0, \alpha]$

   b. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \alpha x \text{ si } -1 \leq x < 3 \\ \beta x + \gamma \text{ si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

10. Demuestre que la ecuación $x^4 + x = 2 - x^2$ tiene exactamente dos raíces reales en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$.
    Sugerencia: Consulte la clase del día 13 de Febrero de 2023.
11. Sea f una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(4) = 5$ y $f'(x) \geq 9$ para todo x, diga cuál es el menor valor posible que puede adquirir $f(2)$.
12. Sea ψ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que ella es simétrica con respecto al eje x. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}^+$ existe $c \in (-a, a)$ tal que $\left.\frac{d\psi}{dx}(x)\right|_{x=c} = \frac{\psi(a)}{a}$.
13. Demuestre aplicando el teorema de Lagrange que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

Contenido: Aplicaciones del teorema de Rolle y Lagrange.

14. Haciendo uso del teorema de Lagrange demuestre que

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{5}<\arctan(2)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

15. Demuestre cada una de las siguientes desigualdades haciendo uso del teorema de Lagrange

    a) $|\text{sen}(x)|\leq x$ si $x\geq 0$.

    b) $|x-y|\leq|\tan(x)-\tan(y)|$ con $x,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

    c) $e^x>ex$ para todo $x>1$.

    d) $|\text{sen}(x)-\text{sen}(y)|\leq|x-y|$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$.

    e) $\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$ para todo $x\geq 0$.

    f) $\dfrac{1}{2}<\ln(2)<1$.

    g) $\text{arcsen}(x)-\text{arcsen}(y)>x-y$ para todo $x,y\in[-1,1]$.

16. Aplicando el teorema de Lagrange demuestre que:

    a) $\dfrac{55}{27}<\sqrt[3]{9}<\dfrac{25}{12}$

    b) $\dfrac{3}{2}<\sqrt{\pi}<\dfrac{9}{4}$

17. Demuestre que la diferencia de las raices cuadradas de dos números naturales consecutivos difieren en menos de $\frac{1}{2}$, ¿Qué se puede decir sobre las raices cúbicas?.

18. Enuncie el teorema de la constante y aplíquelo para demostrar que

    a) $\text{arcsen}(x)+\text{arcsen}(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

    b) $\arctan(x)+\text{arccot}(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

    c) $3\arccos(x)-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi$ si $|x|\leq\dfrac{1}{2}$.

    d) $2\text{arcsen}(x)=\arccos\left(1-2x^2\right)$.

    e) $2\arctan(x)+\text{arcsen}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=\begin{cases}-\pi \text{ si } x\leq -1\\ \\ \pi \text{ si } x\geq 1\end{cases}$

19. Determine el punto de la curva $y=\ln(x)$ en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda cuyos extremos son los puntos $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

20. Considérese la parabola $y=Ax^2+Bx+C$ definida en el intervalo $[a,b]$, demuestre que la cuerda cuyos extremos tienen por abscisa a y b es paralela a la recta tangente a la parábola que pasa por el punto cuya abscisa es $\dfrac{a+b}{2}$.



"La vida es buena por dos cosas: Descubrir y enseñar matemáticas."
Simeon Poisson
LaTeX

Contenido: Aplicaciones del teorema de Rolle y Lagrange.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía IV
Teorema del valor medio de Cauchy y Regla de L'Hôpital.

1. Demuestre que el teorema del valor medio de Lagrange, es un caso particular del teorema del valor medio de Cauchy.

2. Halle el valor de los siguientes límites en caso de que éstos existan.

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x\right)^{\frac{1}{x}}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^3}}$

e. $\lim\limits_{x\to a}\left(x^2-a^2\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

g. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x\text{sen}(x)}-\dfrac{1}{x^2}\right]$

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-\ln\left(x^2+1\right)\right]$

i. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cot(x)}{\cot(2x)}$

j. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right]$

k. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\text{sen}(x)}{x-\pi}$

l. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left[\ln(x)\right]}{\sqrt{x}}$

m. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan(x)}$

n. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\text{sen}(x)-\text{sen}(a)}{x-a}$

ñ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-x}{x-\text{sen}(x)}$

o. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

p. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\text{sen}\left(3x\right)\right]}{\ln\left[\text{sen}(x)\right]}$

q. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sec(x)-\tan(x)\right]$

r. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right]^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

s. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$

t. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left(x\right)\right]^{\frac{\pi}{2}-x}$

u. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\text{sen}(x)-x}{3x^2+x^5}$

v. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2(x)-2\tan(x)}{1+\cos(4x)}$

w. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

x. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}}$

y. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot(2x)$

z. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$

α. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2}$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln^2(x)}\right]$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\text{sen}(x)}$

δ. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos(x)}{\tan^2(x)}$

ϵ. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{x}{\ln(x)}\right]$

ζ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

η. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x-\pi)^2}{\text{sen}^2(x)}$

θ. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\cot(x)\right]^{\frac{1}{\ln(x)}}$

ι. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}$

κ. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$

λ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-\text{sen}(x)}{\text{sen}^3(x)}$

μ. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\text{sen}(x)\right]^{\text{sen}(x)}$

ν. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\cos(x)-2}{x^4}$

ξ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

π. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)-x}{\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}$

Contenido: Teorema del valor medio de Cauchy y Regla de L'Hôpital.

$\rho.\ \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

$\sigma.\ \lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$\tau.\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(3x) - 3\arctan(x)}{x^3}$

$\upsilon.\ \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^2}$

$\phi.\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1}$

$\chi.\ \lim\limits_{x\to 0^+} [\text{sen}(x)]^{\tan(x)}$

$\psi.\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{ax}}$

$\omega.\ \lim\limits_{x\to 0} \left[\csc^2(x) - x^{-2}\right]$

I. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln[\text{sen}(x)]}{(\pi-2x)^2}$

II. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

III. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\text{sen}(x)}$

IV. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^n(x)}{x}$

V. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

VI. $\lim\limits_{x\to 0} [\text{sen}(x)]^{x^2}$

VII. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{\ln(x)}\right]$

VIII. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \text{arcsen}(x)}{\text{sen}^3(x)}$

IX. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1-e^x}{x^2}$

X. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} [1-\tan(x)]\sec(2x)$

XI. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \text{sen}(x) - 1}{\ln(1+x)}$

XII. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\text{sen}^2(x) - x^2}$

XIII. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{2x+5}$

XIV. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arctan(x)}{1-cos(x)}$

XV. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x^2}$

XVI. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

XVII. $\lim\limits_{x\to 0^+} [1-\cos(x)]\cot(x)$

XVIII. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(2x)}{\arctan(3x)}$

XIX. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\text{arccot(x)}}$

XX. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2(x) - 2\tan(x)}{1+\cos(4x)}$

XXI. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln[\text{sen}(nx)]}{\ln[\text{sen}(x)]}$

XXII. $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\tan(2x)}[\tan(7x)]$

3. Si f' y f'' son funciones continuas demuestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}) = f''(x)$$

4. El primer libro de Cálculo fue publicado en 1696 por el marqués de L'Hôpital y se tituló ***Analyse de Infiniment Petits***, en este libro L'Hôpital enuncia y demuestra la ley que hoy lleva su nombre, para ilustrar su ley hizo uso del siguiente límite el cual pedimos hallar

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}, \quad a > 0$$



"Alista esas curvas indeterminadas que hoy no tengo límites."
Guillaume de L'Hôpital
LaTeX

Contenido: Teorema del valor medio de Cauchy y Regla de L'Hôpital.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía V
Graficación de Funciones
PRIMERA PARTE

Para cada una de las siguientes funciones determine:

- Dominio.
- Simetría.
- Puntos de corte con los ejes coordenados.
- Asíntotas.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Puntos máximos y mínimos.
- Intervalos de concavidad y convexidad.
- Puntos de inflexión.

1. $f(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$
3. $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$
4. $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(x)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^4-3}{x}$
7. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
8. $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$
9. $f(x) = x^4 - 2x + 10$
10. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
11. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
13. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
14. $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$
15. $f(x) = x^3 - 3x^2$
16. $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
18. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$
19. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$
20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
21. $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2}$
22. $f(x) = \ln(x) - \arctan(x)$
23. $f(x) = x^3 - 4x$
24. $f(x) = x - 2\arctan(x)$
25. $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}\cos(2x)$
26. $f(x) = \cos^3(x) + \operatorname{sen}^3(x)$
27. $f(x) = \left(2 + x^2\right)e^{-x^2}$
28. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 15x + 5$
29. $f(x) = x + \cos(x)$
30. $f(x) = \dfrac{6x}{1-x^2}$
31. $f(x) = (x+1)\ln^2(x+1)$
32. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$
33. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2$
34. $f(x) = x^2 + 4x + 6$

Contenido: Graficación de funciones.

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

36. $f(x) = 2 + (x-1)^4$

37. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

38. $f(x) = x + |x|$

39. $f(x) = (x+4)^{\frac{2}{3}} - (x-4)^{\frac{2}{3}}$

40. $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$

41. $f(x) = \ln[\text{sen}(x)]$

42. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

43. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

44. $f(x) = \text{sen}(x) + \dfrac{\text{sen}(2x)}{2}$

45. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

47. $f(x) = \sqrt{x^3-x}$

48. $f(x) = x\text{sen}(x)$

49. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

50. $f(x) = \arctan[\ln(x)]$

51. $f(x) = x\ln^2(x)$

52. $f(x) = (8+x)^{\frac{1}{3}} - (8-x)^{\frac{1}{2}}$

53. $f(x) = x - 2\arctan(x)$

54. $f(x) = \text{arcsen}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$

55. $f(x) = 2x - \tan(x)$

56. $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-4)^{\frac{2}{3}}$

57. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

58. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

59. $f(x) = x^x$

60. $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$

61. $f(x) = xe^x$

62. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2}$

63. $f(x) = \cos(x) - \ln[\cos(x)]$

64. $f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$

65. $f(x) = e^{\text{sen}(x)}$

66. $f(x) = x\arctan(x)$

67. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

68. $f(x) = e^{\text{arcsen}\left(\sqrt{x}\right)}$

69. $f(x) = x^2(x-12)^2$

70. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$

71. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

72. $f(x) = \text{sen}(x)\text{sen}(2x)$

73. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

74. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

75. $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x)$

76. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

77. $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

78. $f(x) = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

79. $f(x) = x - \arctan(x)$

80. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

81. $f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$

82. $f(x) = x + \text{sen}(x)$

83. $f(x) = \text{sen}(3x)$

84. $f(x) = \text{arcsen}\left[\ln(x^2+1)\right]$

85. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln(x)$

86. $f(x) = e^{\arctan(x)}$

87. $f(x) = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

88. $f(x) = x - \ln(x+1)$

89. $f(x) = 2x + 2 - 3(x+1)^{\frac{2}{3}}$

90. $f(x) = x\arctan(x)$

91. $f(x) = \dfrac{\text{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

92. $f(x) = \dfrac{(x^2-5)^3}{125}$

93. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3}$

94. $f(x) = x + \dfrac{\ln(x)}{x}$

95. $f(x) = \dfrac{x^4-3}{x}$

96. $f(x) = x\ln(x)$

97. $f(x) = \left(2 + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

98. $f(x) = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$

99. $f(x) = xe^{-x}$

100. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

101. $f(x) = 2|x| - x^2$

102. $f(x) = x^2e^{-x^2}$

103. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

104. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

105. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x}$

Contenido: Graficación de funciones.

106. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

107. $f(x) = x\sqrt{x+3}$

108. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$

109. $f(x) = \cos(x)\cos(2x)$

110. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

111. $f(x) = e^{8x-x^2-14}$

112. $f(x) = \ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right]$

113. $f(x) = \dfrac{8}{x^2-4}$

114. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$

115. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$



"La verdad se encuentra en la simplicidad y no en la multiplicidad y confunsión de las cosas"
Isaac Newton
LaTeX

Contenido: Graficación de funciones.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía V
Graficación de funciones
SEGUNDA PARTE

1. Suponga que $f''(x) > 0$ y que $g''(x) > 0$, para toda x, ¿Qué condiciones adicionales simples, en caso de que las haya, se necesitan para garantizar que

   a) $f(x) + g(x)$ es convexa para toda x.
   b) $f(x)g(x)$ es convexa para toda x.
   c) $f[g(x)]$ es convexa para toda x.

2. Demuestre que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ es convexa si $a > 0$ y cóncava si $a > 0$.

3. Sea $f(x) = (x - \xi)^n$ donde $n \in \mathbb{N}$

   a) Demuestre que $(\xi, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si n es impar.
   b) Demuestre que $(\xi, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f, pero que corresponde a un mínimo relativo cuando n es par.

4. Si $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$

5. Determine los valores de α, β y γ para que la función $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ pase por el punto $A(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $B(1, 1)$.

6. Demuestre que $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ no tiene valores críticos cuando $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, ¿Qué ocurre cuando $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$?

7. Si $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, determinar α, β, γ y δ tales que f tenga un extremo relativo en $A(0, 3)$ y tal que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $B(1, -1)$

8. Demuestre que una ecuación cúbica tiene exáctamente un punto de inflexión.

9. Determine los valores de α, β, γ y δ tales que $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x\delta$ tenga un mínimo relativo en -3 en $x = 0$ y un máximo relativo de 4 en $x = 1$.

10. Una función f cumple que $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ ¿Qué se puede concluir sobre f?

11. Determine los valores de α y β para que la función $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \dfrac{\beta}{\sqrt{x}}$ tenga un punto de inflexión en $A(4, 13)$

12. Encuentre los valores de α, β y γ para que la función $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ tenga un máximo relativo en 6 cuando $x = 2$ y que la ordenada en el origen sea igual a 4.

Contenido: Graficación de funciones.

13. Hallar los valores de α, β y γ tales que la gráfica de $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión $A\,(1,1)$

14. Determine una función cúbica de la forma $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ tal que el punto $A\,(-2,3)$ sea un punto máximo y $B\,(1,0)$ sea un punto mínimo.

15. Demuestre que una función cuadrática no posee puntos de inflexión.

16. ¿Para que valores de α y β la función $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ tenga un valor máximo en $x = -3$ y un valor mínimo en $x = -1$?

17. Trazar la gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones

    a) f es una función par.
    b) f tiene un mínimo local en el punto $A\,(2,-1)$
    c) Los puntos $B\,(1,1)$ y $C\,(4,0)$ son puntos de inflexión.
    d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

18. Bosqueje el gráfico de una función f tal que:

    a) $f(0) = 0$
    b) $f'(-1) = 0; f'(0) = 0; f'(1) = 0$
    c) $f'(x) < 0$ si $x - 1$ y $-1 < x < 0$
    d) $f'(x) >$ si $0 < x < 1$ y $x > 1$

19. Una función f cumple las siguienes propiedades

    a) f es continua en $(0,2)$
    b) f tiene un máximo relativo en $x = 1$, pero $f'(1)$ no existe.

    Basado en esta información haga un bosquejo del gráfico de f.

20. Bosqueje la posible gráfica de una función f que cumpla con las siguientes propiedades:

    a) f es continua en todo su dominio.
    b) $f(,4) = -3; f(0) = 0; f(3) = 2$
    c) $f'(-4) = 0; f'(3) = 0, f'(x) > 0$ para $x < -4$, $f'(x) > 0$ para $-4 < x < 3$, $f'(x) < 0$ para $x > 3$
    d) $f''(4) = 0; f''(0) = 0, f''(x) < 0$ si $x > -4$, $f''(x) > 0$, para $-4 < x < 0$, $f''(x) < 0$ si $x > 0$.

21. Construya la gráfica de una función f que cumple las siguientes propiedades

    a) Dom$f(x) = 0 \leq x \leq 6$
    b) $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0$
    c) $f'(x) > 0$ si $x \in (0,2)$; $f'(x) < 0$ si $x \in (2,4) \cup (4,6)$
    d) $f'(2) = f'(4) = 0, f''(x) > 0$ si $x \in (0,1) \cup (3,4)$, $f''(x) < 0$ si $x \in (1,3) \cup (4,6)$

Contenido: Graficación de funciones.

22. Una función cumple con las siguientes características:

    a) f es continua.
    b) $f(-2) = 3; f(3) = -2$
    c) $f'(x) = 0$ si $x > 2$
    d) $f''(x) < 0$ si $x < 2$

    Con esta información construya un posible gráfico para dicha función.

23. Construir el gráfico de una función f en el intervalo $[0, 6]$ tal que ella cumpla con los siguientes requerimientos

    a) $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0$
    b) $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2) \cup (2, 6)\,; f'(2) = 0$
    c) $f''(x) < 0$ si $x \in (0, 1) \cup (0, 6)$
    d) $f''(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$

24. Una función f cumple con las siguientes condiciones

    a) $f(0) = 5; f(2) = 0$
    b) $f'(2) = 0, f''(3)$ no existe.
    c) $f''(x) > 0$ si $x < 3$.
    d) $f''(x) < 0$ si $x > 3$

    Basado en esta información construya el gráfico de f.

25. Una función f cumple con los siguientes requerimientos

    a) $f(0) = 2; f(2) = f(-2) = 1$
    b) $f'(0) = 0$
    c) $f'(x) > 0$ si $x < 0$; $f'(x) < 0$ si $x > 0$
    d) $f''(x) < 0$ si $|x| < 2$, $f''(x) > 0$ si $|x| > 2$.

    Realice un bosquejo de la gráfica de f.

26. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:

    a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$
    b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$
    c) $f(0) = 3$
    d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$
    e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

27. Grafique una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

    a) Tiene un máximo local en el punto $A(0, -2)$

    b) El punto $B(4, 6)$ es un punto mínimo.

    c) f tiene una asíntota vertical en $x = 2$

    d) La recta $y = x$ es una asíntota oblícua de f

    e) No existen asíntotas horizontales ni puntos de inflexión.

28. Una función f es tal que

    a) Es simétrica con respecto al origen.

    b) La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

    c) f tiene una asíntota horizontal en $y = 2$

    d) No existen puntos de la gráfica si $x \leq 1$

    Con esta información construya un posible gráfico para la función f.

29. Sea f una función tal que

    a) f es continua en su dominio.

    b) $f(-3) = 1$

    c) $f'(x) < 0$ si $x < -3$; $f'(x) > 0$ si $x > -3$; $f''(x) < 0$ si $x \neq 3$

    Realice un bosquejo de su gráfica.

30. De una función f se sabe que

    a) Es simétrica con respecto al eje y

    b) Tiene una asíntota vertical en $x = 2$

    c) Los puntos $A(1, 0)$ y $B(4, 2)$ son puntos mínimos-

    d) El punto $C(0, 3)$ es un punto máximo.

    e) El punto $D\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ es un punto de inflexión.

    f) No existen asíntotas horizonales.

    Con esta información grafique a la función f.

31. Grafique una función f que satisfaga la siguientes condiciones

    a) El punto $A(-2, 3)$ es un máximo local.

    b) El mínimo local de f es alcanzado en el punto $B(4, -1)$

    c) Los puntos $C(-4, 0), D(0, 1)$ y $E(6, 1)$ son puntos de inflexión.

    d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$

    e) No existen asíntotas horizontales si $x \to -\infty$.

    f) No existen asíntotas verticales.

32. Dibuje una gráfica de una función continua f que cumpla con

    a) $f(-1) = 0, f(0) = 1$

    b) $f'(3)$ no existe, $f'(5) = 0$.

    c) $f'(x) > 0$ si $x < 3$ y $x > 5$.

    d) $f'(x) < 0$ si $3 < x < 5$

Contenido: Graficación de funciones.

33. Construya el grafico de una función f si ella es tal que

    a) El dominio de la función es el intervalo $[0, 6]$

    b) $f(0) = 3, f(3) = 0, f(6) = 4$

    c) $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 3)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (3, 6)$

    d) $f''(x) > 0$ si $x \in (0, 5)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (5, 6)$

34. Dibuje el grafico de una función f si se tiene que

    a) $f(-x) = -f(x)$

    b) Tiene un máximo local en el punto $A(-2, 2)$

    c) Tiene un mínimo local en el punto $B(2, -2)$

    d) Los puntos $C(-1{,}4, 1{,}2)$ $D(0, 0)$ y $F(1{,}4, -1{,}2)$ son puntos de inflexión.

    e) f no posee asíntotas horizontales ni verticales.

35. Haga un bosquejo de la gráfica de una función f que cumple con lo siguiente

    a) $f(0) = 0$

    b) $f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$

    c) $f'(x) < 0$ si $x < -1$ y $-1 < x < 0$

    d) $f'(x) > 0$ en $0 < x < 1$ y $x > 1$

36. Bosqueje una posible gráfica de una función f que cumple con las siguientes condiciones:

    a) f es continua.

    b) $f(2) = -3, f(6) = 1$

    c) $f'(2) = 0, f'(x) > 0$ si $x \neq 0$, $f'(6) = 3$

    d) $f''(6) = 0$, $f''(x) > 0$ si $2 < x < 6$, $f''(x) < 0$ si $x > 6$

37. Representar de manera gráfica a una función f que cumple con lo siguiente

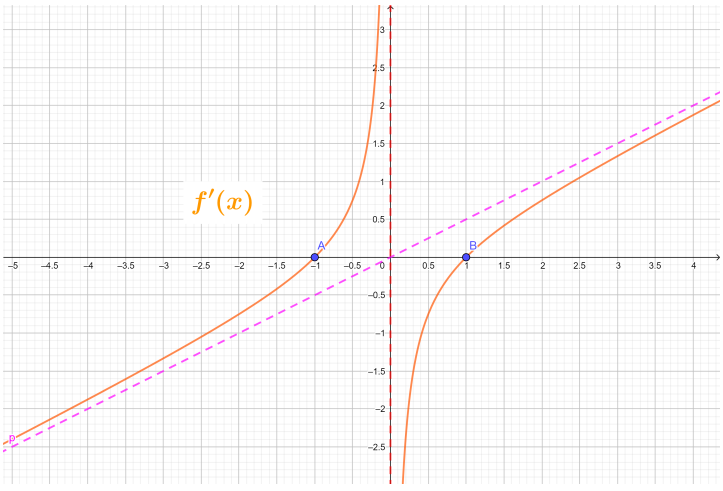
    a) $f(-2) = 0, f(4) = 0$

    b) $f'(3) = 0, f''(1) = 0, f''(2) = 0$

    c) $f''(x) < 0$ si $x < 1$ y $x > 2$

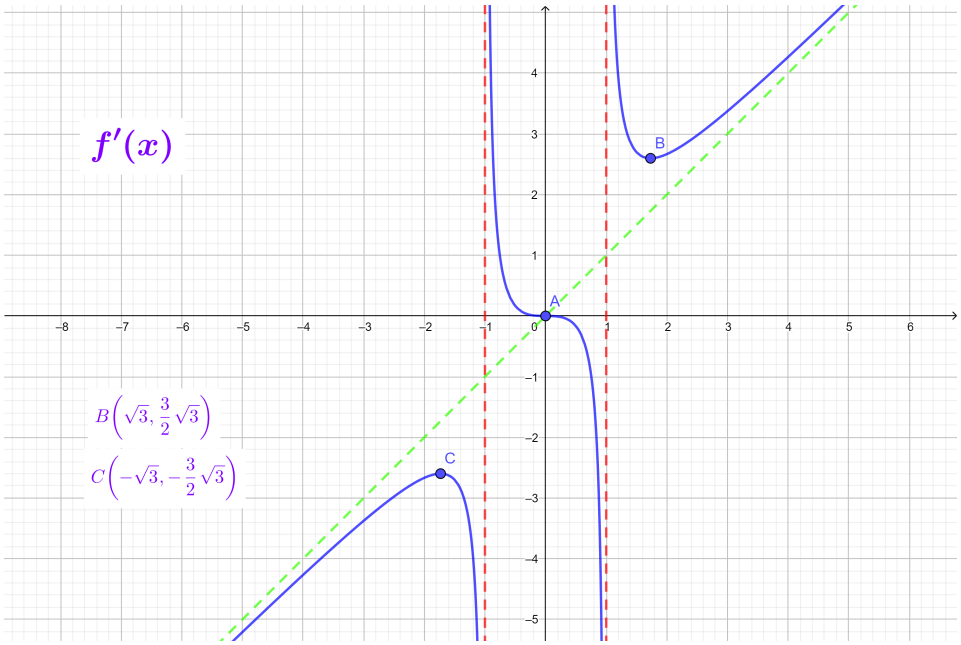
    d) $f''(x) > 0$ si $1 < x < 2$

38. El siguiente gráfico corresponde al de la derivada de alguna función f a partir de dicho gráfico construya la representación gráfica de f

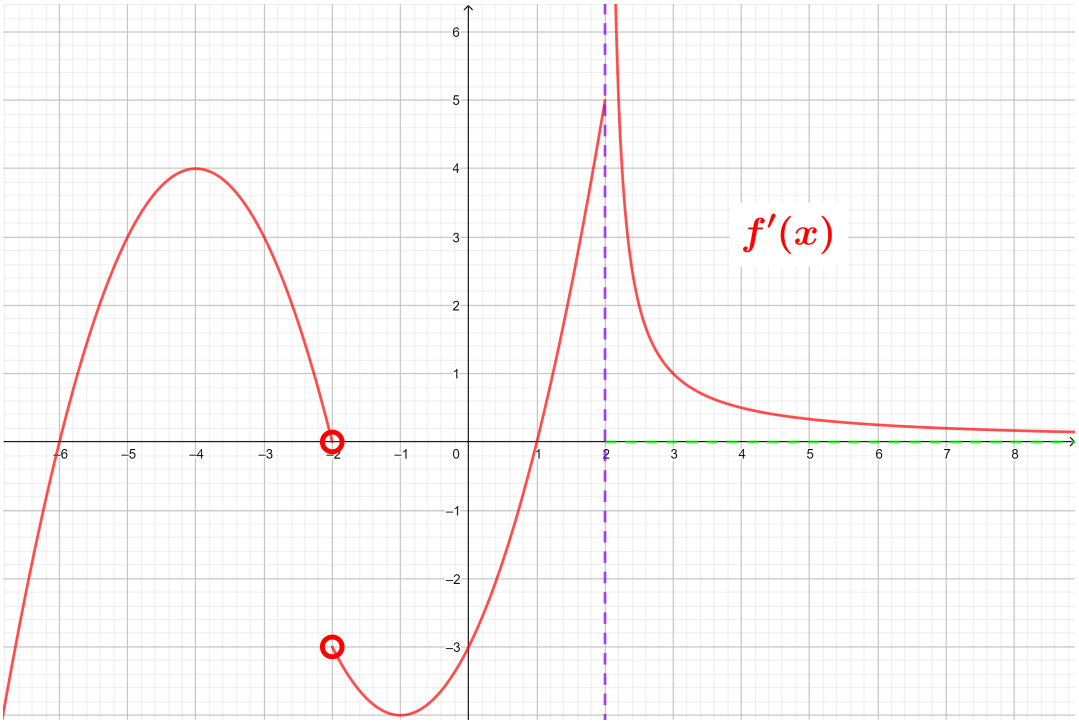


Contenido: Graficación de funciones.

39. Construya el gráfico de una función f a partir del gráfico dado que corresponde a f'



40. El siguiente gráfico corresponde al de la derivada de alguna función f a partir de dicho gráfico construya la representación gráfica de f





"Dios usó las hermosas matemáticas al crear el mundo."
Paul Dirac
LaTeX

Contenido: Graficación de funciones.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía VI
Optimización

1. Un barco A está a 300m de un punto O a medianoche y se dirige hacia el oeste a $150\frac{m}{s}$. Un barco B está a 200m al norte del punto O y se dirige hacia el sur a $150\frac{m}{s}$. Calcular cuándo están más cercanos los dos barcos entre si y calcular esa distancia mínima.

2. Un triángulo rectángulo está formado por dos segmentos positivos y una recta que pasa por el punto $A(2,3)$. Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

3. Una ventana tiene forma rectángular en la parte inferior y semicircular en la parte superior. Hallar las dimensiones cuando el perímetro es de 12m si se requiere que el área sea máxima.

4. P es un punto en el primer cuadrante sobre la curva $y = 7 - x^2$. Por P se traza la tangente a la curva y sean A y B los puntos en que corta a los ejes coordenados. Hallar la ordenada de P para que la distancia entre A y B sea mínima.

5. Una página para impresión va a contener 24cm^2 de área impresa, un margen de $\frac{3}{2}$cm en las partes superior e inferior y un margen de 1cm en los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la página más pequeña que llenaría estas condiciones?

6. Hallar la distancia mínima del punto $P(4,2)$ a la parábola $y^2 = 8x$

7. Una hoja de publicidad debe contener 50cm^2 de material impreso, con 4cm de margen arriba y abajo y 2cm de márgenes laterales, ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?

8. Un campesino tiene 100m de alambre y quiere usarlos para formar tres lados de un huerto rectangular siendo el cuarto lado la pared de la casa, ¿Cuáles dimensiones del huerto encerrarán la máxima área posible con el alambre?

9. Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

10. El perímetro combinado de un triángulo equilátero y un cuadrado es 10. Hallar las dimensiones de ambas figuras que producen la mínima área total.

11. Un cable de longitud L se va a cortar en dos trozos para formar con ellos un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Donde se debe realizar el corte si la suma de las áreas debe ser mínima?

12. La sección transversal de una viga rectangular de madera cortada de un tronco circular de diámetro 120cm tiene longitud x y anchura y. La resistencia de la viga varía en proporción directa al producto de la longitud y al cuadrado del ancho. Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga de mayor resistencia.

13. Encuentre los puntos de la parábola $x = 2y^2$ qye están más cercanos al punto $(10,0)$

Contenido: Optimización.

14. Un alambre de longitud 1m se va a cortar en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un círculo. ¿Dónde debe cortarse el alambre si la suma de las dos áreas debe ser mínima?

15. Si una cabilla de 80cm de longitud se dobla para formar una "L", ¿Cuál es la distancia más corta que existe entre los extremos de la cabilla doblada?

16. Encontrar las dimensiones del rectángulo de perímetro mínimo cuya área es de 16m^2.

17. Dos postes de 15m y 20m de altura, están situados a una distancia de 21m y se quieren unir sus extremos superiores por un cable que en un punto intermedio debe tocar el suelo. Ubicar el punto donde el cable toca el piso para que la longitud sea mínima.

18. Determine dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea tan grande como sea posible.

19. César y Diego disponen de 200m de tela de alambre con la que planean cercar un patio rectangular para encerrar a Mauricio. Si se desea que el área sea máxima, ¿Cuáles deben ser las dimensiones?

20. Un fabricante de cajas de cartón desea hacer cajas abiertas de piezas de cartón de 12cm^2, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados. Encontrar la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea el mayor posible.

21. Dos postes de 5m y 7m de altura, tienen una separación de 30m y se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos superiores de los postes, ¿Dónde se han de fijar los cables para que la cantidad a emplear sea mínima?

22. Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular. Si la resisencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de su altura. Encontrar las dimensiones de la sección transversal que dala viga de mayor resistencia.



"¡Ouch!."
Isaac Newton
LaTeX

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía VII
Sucesiones Reales Infinitas
PRIMERA PARTE

1. Determine un término general para cada una de las siguientes sucesiones e indique si ellas son convergentes o divergentes

   a) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \ldots$

   b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots$

   c) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}, \frac{9}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{16}{\sqrt[5]{\pi}}, \frac{25}{\sqrt[6]{\pi}}, \ldots$

   d) $1, \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-\frac{2}{3}}, \frac{1}{1-\frac{3}{4}}, \ldots$

   e) $2, 7, 12, 17, \ldots$

   f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

   g) $2, 1, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{4^2}, \frac{2^5}{5^2}, \ldots$

   h) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

   i) $-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \ldots$

   j) $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \ldots$

   k) $2, 4, 2, 4, \ldots$

   l) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

   m) $\frac{1}{2-\frac{1}{2}}, \frac{2}{3-\frac{1}{3}}, \frac{3}{4-\frac{1}{4}}, \frac{4}{5-\frac{1}{5}}$

   n) $2, \frac{4}{2}, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, \frac{32}{120}, \ldots$

   ñ) $\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{16}{9}, \ldots$

   o) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

   p) $\frac{2}{1\cdot 3}, \frac{4}{2\cdot 5}, \frac{6}{3\cdot 7}, \ldots$

   q) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

   r) $10, 5, 10, 5, \ldots$

   s) $-5, 10, -17, 26, \ldots$

   t) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

   u) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots$

   v) $1, 3, 5, 7, \ldots$

   w) $2, 4, 2, 4, \ldots$

   x) $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \ldots$

   y) $7, 9, 11, 13 \ldots$

   z) $2, 6, 18, 54, \ldots$

   aa) $1, 4, 9, 16, \ldots$

   ab) $0, 2, 0, 2, \ldots$

2. Demuestre haciendo uso de la definición formal que

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1} = 0$

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2-1} = \frac{2}{3}$

   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+1} = 0$

   d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6} = 0$

   e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

   f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

Contenido: Sucesiones reales infinitas.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^2+3n+2}=2$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{n^2+3}=12$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=\infty$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}-(n-1)^2=-\infty$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n-1}=\infty$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+3n^2+6n+1}{n^2+4}=\infty$

3. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}0 \text{ si } |r|<1\\ 1 \text{ si } r=1\\ \infty \text{ si } r>1\\ \text{No existe si } r\leq -1\end{cases}$$

4. Pruebe que si $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ¿El recíproco es cierto?

5. Demuestre que las siguientes sucesiones son convergentes haciendo uso del teorema de estricción:

a) $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *b)* $\left\{\dfrac{e^{\operatorname{sen}(\pi n)}}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *c)* $\left\{\dfrac{3n^2+\operatorname{sen}(2n)}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

6. Diga si las siguientes sucesiones $\{a_n\}$ son convergentes, si su término general está dado por:

a) $a_n=\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$

b) $a_n=\dfrac{n^2}{n+1}$

c) $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+n-2}}{n+1}$

d) $a_n=\dfrac{2^n+1}{2^n}$

e) $a_n=\dfrac{n}{\arctan(n)}$

f) $a_n=(2n+5)^{\dfrac{1}{n}}$

g) $a_n=-\left(n^2+1\right)^{\dfrac{1}{n}}$

h) $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2+6}-n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt[5]{n^4+1}}$

i) $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

j) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$

k) $a_n=\left(1-\dfrac{7}{n}\right)^n$

l) $a_n=\ln(n+1)-\ln(n)$

m) $a_n=\dfrac{n^2-n+5}{2n+6}$

n) $a_n=\sqrt[n]{3^{n+1}}$

ñ) $a_n=\dfrac{\operatorname{sen}^2(n)}{5^n}$

o) $a_n=\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$

p) $a_n=(-1)^n\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

q) $a_n=\dfrac{2n^3}{5n^2+4}$

r) $a_n=(0{,}0001)^{-\dfrac{1}{n}}$

s) $a_n=\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$

t) $a_n=\dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\sqrt[n]{n}}$

u) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

v) $a_n=\dfrac{2^n+1}{e^n}$

w) $a_n=\dfrac{(n+3)^2}{n^2}$

x) $a_n=2-\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n$

y) $a_n=\dfrac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}$

z) $a_n=n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

aa) $a_n=n\cos(\pi n)$

ab) $a_n=5\sqrt{n}$

ac) $a_n=n\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

ad) $a_n=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$

ae) $a_n=1+(-1)^n$

af) $a_n=n5^{-n}$

ag) $a_n=\pi^{-\dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}}$

ah) $a_n=n^{\dfrac{4}{n+6}}$

ai) $a_n=\left[\dfrac{n}{\operatorname{sen}(n)}\right]^{\dfrac{1}{n^3}}$

aj) $a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

ak) $a_n=\dfrac{n^3}{2^{\dfrac{n}{12}}}$

Contenido: Sucesiones reales infinitas.

al) $a_n = \dfrac{n\cos(n!)}{n^2+1}$

am) $a_n = \log_{3n}(2n)$

an) $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$

añ) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

ao) $a_n = \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^n$

ap) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$

aq) $a_n = \sqrt{\dfrac{2+\cos(n)}{4n}}$

ar) $a_n = 100^{\dfrac{n+1}{n}}$

as) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{1+n^3}$

at) $a_n = \left(\dfrac{2+n^2}{7+n^2}\right)^n$

au) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^5+1} + \sqrt[5]{n^2+2}}{\sqrt[5]{n^4+3} + \sqrt{n^2+5}}$

av) $a_n = \dfrac{[\ln(n)]^2}{n}$

aw) $a_n = \dfrac{3n+4}{4n-3}$

ax) $a_n = n \cdot 3^{-n}$

ay) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

az) $a_n = \arctan(2n)$

ba) $a_n = \dfrac{n^2+6n-4}{2n^7-6n}$

bb) $a_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

bc) $a_n = \dfrac{1}{7^n}$

bd) $a_n = \dfrac{\text{sen}(n)}{2^n}$

be) $a_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

bf) $a_n = 3^{\cos(\pi n)}$

bg) $a_n = \dfrac{\ln(n^2)}{n}$

bh) $a_n = \dfrac{3n^5 - 6n^4 + 4}{n^7 - 6n^5 + 4n - 4}$

bi) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

bj) $a_n = \dfrac{1-n^2}{2+7n^2}$

bk) $a_n = \sqrt{n^2 - 4n + 5} - n$

bl) $a_n = \dfrac{\ln(3n)}{\ln(n)}$

bm) $a_n = \dfrac{4n}{6n+5}$

bn) $a_n = \dfrac{\text{sen}^2(n)}{\sqrt{n}}$

bñ) $a_n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^{\dfrac{2}{n}}$

7. En este ejercicio se estudia la **Sucesión de Fibonacci:**

   a) Supóngase que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja procrean una pareja nueva, que es fértil al mes. Si comenzamos con una pareja de recien nacidos. Demuestre que si $F_1 =$ y $F_2 = 1$, entonces la sucesión de Fibonacci

   $$\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$$

   está dada por la fórmula de recurrencia

   $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geq 3$$

   b) Demuestre que el término general de la sucesión es

   $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

   Sugerencia: Verifique que F_n satisface la fórmula de recurrencia dada en *a*).

   c) Sea $f_n \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ Demuestre que

   $$f_{n-1} = 1 + \frac{1}{f_{n-2}}$$

   d) Sea $\{F_n\}$ la sucesión de Fibonacci dada en *b*). Demuestre que

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Contenido: Sucesiones reales infinitas.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía VII
Sucesiones Reales Infinitas
SEGUNDA PARTE

1. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que ella es estríctamente creciente y $5 \leq a_n \leq 7$, ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de esta sucesión?

2. Estudie la monotonía de las siguientes sucesiones

   a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{5n+3}$

   b) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

   c) $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$

   d) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

   e) $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$

   f) $a_n = \dfrac{n-2}{n+2}$

   g) $a_n = \dfrac{1}{3n+5}$

   h) $a_n = n - n^2$

   i) $a_n = \dfrac{n}{e^n}$

   j) $a_n = \dfrac{8^n}{(3n)!}$

   k) $a_n = n - 2^n$

   l) $a_n = 5 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

   m) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   n) $a_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$

   ñ) $a_n = \arctan(n)$

   o) $a_n = \dfrac{(3n)!}{7^n}$

3. Supóngase que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y tal que para todo n $a_n \neq 0$, demuestre que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \dfrac{1}{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$ es decreciente.

4. Supóngase que las siguientes sucesiones son convergentes, calcule para cada una de ellas una fórmula de recurencia para en término $n+1$ y el valor al cual convergen.

   a) $a_1 = \sqrt{7}, a_2 = \sqrt{7+\sqrt{7}}, a_3 = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7}}}, a_4 = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7}}}}, ...$

   b) $a_1 = \sqrt[3]{2}, a_2 = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}, a_3 = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}, ...$

5. Sea $A > 0$, demuestre que la sucesión de términos positivos definida recursivamente por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$$

   es convergente.

   Sugerencia: Use el hecho de que $a_n^2 - A \geq 0$ y aplique el teorema de la convergencia monótona.

6. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a L, con $L \neq 0$, demuestre que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

7. Demuestre aplicando el teorema de la convergencia monótona que la siguiente sucesión es convergente

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2n}$$

Contenido: Sucesiones reales infinitas.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía VIII
Fórmula de Taylor

1. Encuentre el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de las siguientes funciones en el punto a y de grado n:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $a = 8$, $n = 3$.

   b) $f(x) = \sec(x)$, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $n = 3$.

   c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$, $n = 3$.

   d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $a = 0$, $n = 4$.

   e) $f(x) = \tan(x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 5$.

   f) $f(x) = \tan(x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 4$.

   g) $f(x) = \tan(x)$,$a = 0$, $n = 5$.

   h) $f(x) = x^3 - 1$, $a = 1$, $n = 3$.

   i) $f(x) = e^x \cos(2x)$, $a = 0$, $n = 3$.

   j) $f(x) = \ln[\operatorname{sen}(x)]$, $a = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 6$.

   k) $f(x) = x^{3/2}$, $a = 1$, $n = 4$.

   l) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$, $a = 5$, $n = 5$.

   m) $f(x) = \cos(x)$, $a = \dfrac{2\pi}{3}$, $n = 4$.

   n) $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$, $a = 0$, $n = 3$.

   ñ) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $a = \dfrac{\pi}{6}$, $n = 3$.

   o) $f(x) = \cos(x)$, $a = \pi$, $n = 4$.

   p) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $a = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 4$.

   q) $f(x) = e^{-x}$, $a = 1$, $n = 4$.

   r) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$, $n = 3$.

   s) $f(x) = \cos(x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 5$.

   t) $f(x) = \tan(x)$, $a = 0$, $n = 3$

   u) $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$, $n = 4$.

   v) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $n = 5$.

   w) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$, $a = 0$, $n = 4$.

   x) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$, $n = 3$.

   y) $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, $n = 4$.

   z) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $a = 0$, $n = 4$.

   α) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, $a = 0$, $n = 4$.

   β) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $a = 0$, $n = 4$.

   γ) $f(x) = \arctan(x)$, $a = 0$, $n = 2$.

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto $A(0,0)$ sabiendo que

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

3. Demuestre que la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto $A(0,0)$ es horizontal, sabiendo que

$$P_6(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6$$

4. Haciendo uso de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ y de $P_6(x)$ en $a = 0$ aproxime el valor de $\sqrt[3]{3}$ y dé una estimación del error cometido.

5. Dé una aproximación al valor $\ln(2,3)$ aplicando el polinomio de Taylor de grado 7 centrado en $a = 1$ y dé una estimación del error cometido.

Contenido: Fórmula de Taylor.

6. Demuestre que si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ entonces su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $a = 1$ es exáctamente $f(x)$.

7. Haciendo uso de un polinomio de Taylor aproxime los siguientes valores si se quiere que el error cometido no sea mayor que 10^{-9} en todos los casos (los ejercicios en negrilla son peligrosos, proceda con cuidado):

a) $\ln(2{,}25)$	*d*) $\sqrt[5]{3}$	*g*) $\tan(1°)$	*j*) $\arctan(2)$	*m*) **$\cos(14°)$**
b) $\operatorname{sen}(89°)$	*e*) $\cot(89°)$	*h*) $\sqrt{17}$	*k*) $\log_3(2)$	*n*) $\sqrt[3]{e}$
c) $\sqrt[7]{11}$	*f*) $\sqrt{\pi}$	*i*) $\sec(89°)$	*l*) $\csc(47°)$	*ñ*) **$\tan(22°)$**

8. Halle el valor de los siguientes límites aplicando la fórmula de Taylor

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ln(x)}{\operatorname{sen}^2(x-1)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x - \tan(x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2\tan(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \arctan(x)}$



"Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama"
Aristóteles
LaTeX

Contenido: Fórmula de Taylor.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía IX
Integral definida

1. Hallar el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-5, 2]$ sobre el eje x, aplicando Sumas de Riemann, tome como c_i el punto medio de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\mathcal{P}$ que usted seleccione.

2. Hallar el área bajo la curva $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en $[0, 16]$ sobre el eje x, aplicando Sumas de Riemann, tome como c_i el extremo derecho de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\mathcal{P}$ que usted seleccione.

3. Hallar el área entre las curvas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = -x^2 - 1$ sobre el eje x, aplicando Sumas de Riemann, tome como c_i el extremo derecho de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\mathcal{P}$ que usted seleccione.

4. Hallar el área bajo la curva $f(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8$ en el intervalo $[0, 4]$, aplicando Sumas de Riemann, tome como c_i el extremo izquierdo de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\mathcal{P}$ que usted seleccione.

5. Hallar el área de las siguientes regiones haciendo uso de las sumas superiores e inferiores de Darboux

   a) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^3 + 2\right\}$
   b) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 8 - 2x\right\}$
   c) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 2x + 1\right\}$
   d) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3x - 2\right\}$
   e) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 16 - x^2\right\}$

6. Sea f una función tal que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ existe, ¿Se deduce de esto que f es integrable en $[a, b]$?

7. Suponga que $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$ salvo en un número finito de excepciones. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.

8. Sea f una función integrable en $[a, b]$ tal que su rango es el intervalo $[A, B]$ y sea g continua en $[A, B]$. Demuestre que la funcion $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

9. Hallar las siguientes integrales definidas haciendo uso de la n-sima Suma de Riemann en el infinito:

   a) $\displaystyle\int_0^8 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx$
   b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x + 3)\, dx$
   c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(x^2 + x + 1\right) dx$
   d) $\displaystyle\int_1^3 (3x - 2)\, dx$
   e) $\displaystyle\int_{-2}^1 \left(2x^2 + 3\right) dx$
   f) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx$

g) $\int_0^1 \left(x^3+x\right)dx$

h) $\int_0^2 (x+1)dx$

i) $\int_1^4 (3x+1)\,dx$

j) $\int_0^2 \left(x^2+2\right)dx$

k) $\int_{-1}^1 \left(2x^2+1\right)dx$

l) $\int_a^x \left(3at^2+2bt+c\right)dt$

m) $\int_0^T (v_0+gt)\,dt$

n) $\int_0^n [x]dx \ n\in\mathbb{N}$

ñ) $\int_{-2}^1 \left(x^3-3x+2\right)dx$

o) $\int_{-1}^1 \left(|x|-x^3\right)dx$

p) $\int_0^1 \left(x^4+x^2\right)dx$

q) $\int_0^1 \left(x^3-3x+2\right)dx$

r) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x}\right)dx$

10. Demuestre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)dx = 1$

Sugerencia: Aplique el siguiente resultado $\sum_{k=1}^{n} \text{sen}(k\alpha) = \dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{\alpha}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

11. Hallar $\int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ con $0<a<b$. *Sugerencia:* En las Sumas de Riemann, seleccione $c_i = \left(\dfrac{\sqrt{x_{i-1}}+\sqrt{x_i}}{2}\right)^2$.

12. Hallar $\int_a^b \dfrac{dx}{x^2}$ con $0<a<b$. *Sugerencia:* En las Sumas de Riemann, seleccione $c_i = \sqrt{x_{i-1}\cdot x_i}$.

13. Demuestre que las siguientes desigualdades haciendo uso de la propiedad de acotamiento para las integrales definidas:

a) $\dfrac{2\pi}{13} \le \int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{10+3\cos(x)} \le \dfrac{2\pi}{7}$

b) $\dfrac{2}{9} \le \int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^3+8} \le \dfrac{2}{7}$

c) $\pi \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(1+\text{sen}^2(x)\right) \le 2\pi$

d) $\dfrac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}dx \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $3 \le \int_0^2 \dfrac{x^2+5}{x^2+2}dx \le 5$

f) $2 \le \int_0^1 \sqrt{x^2+4}dx \le \sqrt{5}$

g) $1 \le \int_1^4 \dfrac{7}{x^2+5}dx \le \dfrac{7}{2}$

h) $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \le \sqrt{2}$

14. Demuestre que $\sqrt{1+x^3} \le 1+x^3$ para todo $x \ge 0$ y con esto pruebe que

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \le \frac{5}{4}$$

15. Demuestre que si $0 \le x \le 1$ entonces $4-2x^2 \le 4-x^2-x^3 \le 4-x^2$ y con esto demuestre que

$$\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \le \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

16. Se dice que una función f es **periódica de periodo ϕ** si existe $\phi \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x+\phi) = f(x)$, al valor ϕ se le conoce como periodo. Demuestre que si f es periódica de periodo ϕ entonces

    a) $\displaystyle\int_0^{\phi} f(x)dx = \int_a^{a+\phi} f(x)dx$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

    b) $\displaystyle\int_0^{n\phi} f(x)dx = n\int_0^{\phi} f(x)dx$, para todo $n \in \mathbb{N}$

    Haciendo uso de lo anterior hallar $\displaystyle\int_{\pi-1}^{201\pi-1} \operatorname{sen}(x)dx$

17. Sea f una función continua y estríctamente creciente en el intervalo $[0, c]$. Supongamos además que $f(0) = 0$ y que existen $a \in [0, c]$ y $b \in [0, f(c)]$. Demuestre la **desigualdad de Young:**

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \geq ab$$

    Dé una interpretación geométrica de este resultado.

18. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

    a) $\displaystyle f(x) = \int_{-x}^{x} x\cos(t)dt$

    b) $\displaystyle f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t)dt$

    c) $\displaystyle f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2(t)}$ donde $\displaystyle g(x) = \int_0^x \frac{ds}{\operatorname{arcsen}(s)}$

    d) $\displaystyle f(x) = \int_{x^2}^{\tan^2(x)} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt$

    e) $\displaystyle\int_0^y \operatorname{sen}(t)dt + \int_0^x \cos(t)dt - \int_x^y dt = xy$

19. Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Demuestre que

$$\int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{t}\right)dt + \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{t}\right)dt = \frac{\pi}{4}$$

    Sugerencia: Aplique el teorema de valor medio de Lagrange.

20. Una función f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por medio de

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2}dt$$

    Sin calcular la integral, hallar un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$ y $P''(0) = f''(0)$.

21. Hallar una función $f(x)$ continua y no idénticamente igual a 0 que cumpla la siguiente igualdad

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\cos(t)}{1+\operatorname{sen}^2(t)}dt$$

22. Sea f una función estríctamente positiva y continua. Demuestre que la función ϕ definida como

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$ y creciente para $x > 0$.

23. Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}}$

a) Sin hallar la integral (cosa que es imposible) demuestre que f es estríctamente creciente en $[0, \infty)$.

b) Sea g la función inversa de f, que existe por la parte anterior (¿Por qué?). Demuestre que g'' es proporcional a g^2, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g''(x) = kg^2(x)$, hallar el valor de esta constante de proporcionalidad.

24. Sabiendo que f es integrable $\mathbb{R}$. Hallar $f(2)$ si f satisface

a) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2\,(1 + x)$

b) $\displaystyle\int_0^{x} f(t)dt = x^2\,(1 + x)$

c) $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$

d) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2dt = x^2(1 + x)$

25. Sea g una función continua en $\mathbb{R}$, tal que $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = 2$ y $g(1) = 5$. Si definimos $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\left(x - x^2\right) g(t)dt$. Demuestre que

$$f'(x) = \int_0^x (x - t)\, g(t)dt$$

y hallar $f''(1)$ y $f'''(1)$.

26. Hallar una función f y una constante C tales que

a) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \cos(x) - \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\int_0^x f(t) = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C$

c) $\displaystyle\int_C^{x^2} f(t)t = x^6 + 9$

d) $\displaystyle\int_C^x tf(t)dt = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) - \frac{x^2}{2}$

27. Demuestre el **Teorema de Rolle para integrales**:
Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

28. Si $f(x) = \displaystyle\int_1^{\ln(x)} \operatorname{sen}(t^2)dt$ Hallar $\left(f^{-1}\right)'(e)$.

29. Hallar $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\dfrac{ex^2}{\pi} - e\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{sen}(t)}dt}{1+\cos(2x)}$

30. Sea f una función positiva y continua en $[0,\infty)$ tal que posee una asíntota horizontal en $y = A$ con $A \neq 0$ y $f(0) = B$, con esto hallar los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$

    b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$

31. Sea

$$\int_0^{x^2-1} f(t) + \ln(t+1)dt = x^3 - \int_{\operatorname{sen}(x)}^{3} \operatorname{arcsen}(t)dt$$

    Hallar $f(0)$

32. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} g\left(\operatorname{sen}(\sqrt{t})\right)dt}{\displaystyle\int_{-x}^{e^x-1} g\left(\ln\left(t+1\right)\right)dt} = 0$ Hallar el valor de $g(0)$.



"Si yo me despertara después de haber dormido durante mil años, mi primera pregunta sería: ¿Ha sido demostrada la hipótesis de Riemann?"

David Hilbert

LaTeX

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía X
Integración Inmediata

1. Demuestre que si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en I si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + C$ para todo $x \in I$.

2. ¿Qué significado geométrico tiene la constante C del ejercicio anterior?

3. Explique la diferencia entre antiderivada y primitiva de una función.

4. ¿Qué es una función elemental?

5. Muestre un ejemplo de una función no elemental.

6. Sea F una primitiva de f y supongamos que f tiene inversa, la cual denotaremos por f^{-1}. Demuestre que la función G definida por

$$G(x) = xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)$$

es una primitiva de f^{-1}.

7. Hallar la ecuación de la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $A\,(0, 3)$ y cuya pendiente de la recta tangente en cada punto de f está dada por $4x - 3$.

8. Hallar la ecuación de la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $A\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y cuya pendiente de la recta tangente en cada punto de f está dada por $\dfrac{1}{1+x^2}$.

9. Una ecuación de la recta tangente a una curva en el punto donde $x = 1$ es $y = 3x - 4$. Si en cualquier punto (x, y) de la curva se tiene que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 12x - 4$, encontrar la ecuación de la curva.

10. De una función $y = f(x)$ se sabe que

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \\ \\ y'(0) = 1,\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de f

11. En cualquier punto (x, y) de una curva se tiene que $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$ y $(1, 3)$ es un punto de inflexión, sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la segunda derivada en el punto de inflexión es -2. Determine la ecuación de la curva.

12. Hallar la ecuación de la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $A\,(0, -1)$ y cuya pendiente de la recta tangente en cada punto de f está dada por $2e^x + 1$.

13. Desde la orilla de un edificio de altura h es lanzado un objeto hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Demuestre que la ecuación del desplazamiento del objeto es $s(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ donde g es la aceleración de la gravedad.

14. Un objeto se mueve a lo largo de una recta con aceleración $a(t) = 2\cos(t) + 6t$. Su velocidad inicial es $v(0) = -8$ y su posición inicial es $s(0) = -5$. Hallar la ecuación de la posición.

15. Hallar el valor de las siguientes integrales

a) $\int x^{3/4} - \sqrt{x}dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen}^3(x) + 2\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) - 2}{\cos^2(x)}dx$

c) $\int 6x^2 + 8x + 3dx$

d) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^4}\,(1-\sqrt{x})}dx$

e) $\int \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}dx$

f) $\int \frac{(x^m - x^n)^3}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int \frac{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}{1 - x^2}dx$

h) $\int \sqrt[3]{x}\left(x^4 + 6x - \sqrt[4]{x}\right)dx$

i) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

j) $\int \frac{\sec^4(\arctan(x))}{\operatorname{sen}^3(\arctan(x^2))}dx$

k) $\int \frac{e^{x^2+1}}{e^{x^2+6}}dx$

l) $\int \frac{\cos(2x)}{1 - \sqrt{2}\cos(x)}dx$

m) $\int \frac{\ln(x^4)}{\ln(x)}dx$

n) $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

ñ) $\int \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(x)}dx$

o) $\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen}(x)) - 7}{x^5}dx$

p) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}dx$

q) $\int \frac{2 + 6^x + 6^{-x}}{\left(2^{-x} + 3^x\right)^2}dx$

r) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4(x) - \cos^4(x) - \operatorname{sen}^2(x)}$

s) $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2} - 3x\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{x}}dx$

t) $\int \frac{dx}{1 + \cos(x)}$

u) $\int \frac{\csc(x)}{\csc(x) - \operatorname{sen}(x)}dx$

v) $\int \frac{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}dx$

w) $\int \tan(x)\left(\tan(x) + \sec(x)\right)dx$

x) $\int \arccos(x) + \operatorname{arcsen}(x)dx$

y) $\int \arctan(x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)dx$

z) $\int \frac{\sec(x)}{\sec(x) - \cos(x)}dx$

aa) $\int \csc(x)\left(\cot(x) + \csc(x)\right)dx$

ab) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx$

ac) $\int \frac{2\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(2x)}{2 - 2\operatorname{sen}^2(x)}dx$

ad) $\int \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(x)}}{\sqrt{1 + \cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x)}}{\sqrt{1 - \cos(x)}}dx$

ae) $\int \log_{\sqrt{x}}(\cos(x)) \log_{\cos(x)}\left(\sqrt{x}\right)dx$

af) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)\cot(x)}{\cos(x)}dx$

ag) $\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(x)} + \frac{1}{1 - \operatorname{sen}(x)}dx$

ah) $\int \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx$

ai) $\int \frac{\operatorname{sen}(x + a)\operatorname{sen}(x - a)}{\cos(x) + \cos(a)}dx$

aj) $\displaystyle\int \cos^3(x)+\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)dx$

ak) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)+\tan(x)\cot^2(x)}{1+\tan^2(x)}dx$

al) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^4(x)+\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}{\cos^4(x)-\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x)}\cdot\cot(x)dx$

am) $\displaystyle\int \frac{x^n\log_n(x)}{\ln(\sqrt{x})}dx$

16. Hallar cada una de las siguientes integrales de manera que su resultado sea una primitiva continua

a) $\displaystyle\int \left|x^3+2x^2-x-2\right|dx$

b) $\displaystyle\int \left|\tan^2(x)\right|dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{|x|}dx$

d) $\displaystyle\int \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$

e) $\displaystyle\int f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} 3x+1 \text{ si } x<-1 \\ x^2+2x-1 \text{ si } x\geq -1 \end{cases}$

f) $\displaystyle\int f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} -x+2 \text{ si } -1<x\leq 0 \\ x^2 \text{ si } 0<x<2 \\ x+1 \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$

g) $\displaystyle\int f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} 1+x|x| & \text{si } x\leq 1 \\ 2+x & \text{si } x>1 \end{cases}$

h) $\displaystyle\int f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} |x| & \text{si } -8\leq x\leq 0 \\ 2x & \text{si } 0<x<2 \\ -\frac{x}{2}+3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

i) $\displaystyle\int f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{si } x\leq -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } -\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{\pi}{2}<x \end{cases}$

17. Hallar el valor de las siguientes integrales, haciendo uso de la Regla de Barrow

a) $\displaystyle\int_1^6 |x^3+6x^2+5x|dx$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^5 |2x-6|dx$

d) $\displaystyle\int_{-2}^3 \sqrt{|x|-x}dx$

e) $\displaystyle\int_{-2}^5 [x]\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^8 \{x\}\,dx$

18. Demuestre que $\displaystyle\int_0^x (t+|t|)^2\,dt=\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$

19. Hallar $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)dx$ sabiendo que

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } |x|\leq 1 \\ \\ 1-|x| & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$



"Las matemáticas son la ciencia de lo que está claro por si mismo"
Carl Gustav Jacob Jacobi
LaTeX

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XI
Integración por u-sustitución

1. Hallar el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\ln(x)}}{x^2+7}dx$

b) $\displaystyle\int (x+2)\,\mathrm{sen}\left(x^2+4x-6\right)dx$

c) $\displaystyle\int x\cot\left(x^2+1\right)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+4x^2}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x-\arctan(2x)}{1+4x^2}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(3x)}{1+\tan(3x)}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\sec^5(x)}{\csc(x)}dx$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9\ln^2(x)}}$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx$

n) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}dx$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+3}}$

q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{2-5\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

r) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\left(1+\mathrm{sen}^2(x)\right)^2}dx$

s) $\displaystyle\int \frac{\tan^3(1-2x)}{\cos(1-2x)}dx$

t) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(\ln(x)\right)}{x\ln(x)}dx$

u) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sen}(2x)\ln\left(\tan(x)\right)}$

v) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-8}}$

w) $\displaystyle\int \sqrt{1+\mathrm{sen}(x)}dx$

x) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

y) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$

z) $\displaystyle\int 3^x e^x dx$

aa) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$

ab) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan(x)}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx$

ac) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{4-\tan^2(x)}}dx$

ad) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^2(x)\cot(x)}{\sqrt{4-x^2}}dx$

ae) $\displaystyle\int \frac{\tan(3x)-\cot(3x)}{\mathrm{sen}(3x)}dx$

af) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

ag) $\int \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{sen}(2x)\cos(2x)dx$

ah) $\int \dfrac{\ln(x)}{x^2\left(\ln(x)-1\right)^2}dx$

ai) $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

aj) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)-1}}$

ak) $\int \dfrac{\mathrm{sen}^2\left(\ln(x)\right)}{x}dx$

al) $\int \dfrac{6x^2-11x+7}{3x-1}dx$

am) $\int \dfrac{dx}{\cos^3(x)\sqrt{\mathrm{sen}(2x)}}$

an) $\int \dfrac{e^x\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

añ) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

ao) $\int \dfrac{1+x-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$

ap) $\int \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{2-\mathrm{sen}^2(x)}dx$

aq) $\int \dfrac{2^x}{\sqrt{4-4^x}}dx$

ar) $\int \dfrac{x}{1+x\cot(x)}dx$

as) $\int \dfrac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

at) $\int \dfrac{\mathrm{sen}(x)+\cos(x)}{\sqrt[3]{\mathrm{sen}(x)-\cos(x)}}dx$

au) $\int \dfrac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x\ln(x)}dx$

av) $\int \dfrac{dx}{(x+2)\sqrt{x-2}}$

aw) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}}dx$

ax) $\int \dfrac{4^x+1}{2^x+1}dx$

ay) $\int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$

az) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\mathrm{sen}^3(x)\cos^5(x)}}$

ba) $\int 2^x 3^{2x} e^{3x}dx$

bb) $\int \dfrac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x+12}dx$

bc) $\int \tanh(x)dx$

bd) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{senh}(x)}$

be) $\int \dfrac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh^4(x)}dx$

bf) $\int \dfrac{1+\cosh(2x)}{x+\mathrm{senh}(x)\cosh(x)}dx$

bg) $\int x\cosh^2\left(\dfrac{x^2}{2}\right)dx$

bh) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{senh}(x)+2\cosh(x)}$

bi) $\int \sqrt{\cosh(x)-1}dx$

bj) $\int \dfrac{e^x}{\cosh(x)-\mathrm{senh}(x)}dx$

bk) $\int \dfrac{dx}{\left(1+\cosh(x)\right)^2}$

bl) $\int \dfrac{3^{\tanh(x)}}{\cosh^2(x)}dx$

bm) $\int x^2\cosh\left(x^3+3\right)dx$

bn) $\int \dfrac{e^{2x}}{\mathrm{senh}^4(x)}dx$

bñ) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{senh}(x)\cosh(x)}$

bo) $\int \dfrac{dx}{\tanh(x)-1}$

bp) $\int \mathrm{sech}(x)dx$

bq) $\int \dfrac{1+\tanh(x)}{\mathrm{senh}(2x)}dx$

br) $\int e^{2x}\cosh(x)dx$

bs) $\int \dfrac{dx}{x-\sqrt{x-2}}dx$

bt) $\int x^5\sqrt{1-x^3}dx$

bu) $\int \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\dfrac{dx}{1-x}$

bv) $\int \dfrac{\log_3(x)-3}{x\ln(x)}dx$

bw) $\int \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}dx$

bx) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x)}dx$

by) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

bz) $\displaystyle\int \frac{(e^x + 2^x)^2}{2}dx$

ca) $\displaystyle\int \frac{2}{3-3x^2}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}dx$

cb) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))\operatorname{sen}(\ln(x))}{x}dx$

cc) $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan(x))}{\operatorname{sen}(x)}\sec(x)dx$

cd) $\displaystyle\int \frac{-e^x x^2 - e^x x + x + 1}{(e^x+1)^3}dx$

ce) $\displaystyle\int \sec(x)dx$

cf) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}dx$

2. Hallar cada una de las siguientes integrales haciendo la sustitución indicada:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, hacer $x = \frac{1}{u}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, hacer $x = \tan(\theta)$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, hacer $x = \operatorname{sen}(\theta)$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$, hacer $x = \sec(\theta)$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$, hacer $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$, hacer $x = \cosh(t)$

3. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales aplicando la Regla de Barrow

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2x - \sqrt{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{[\operatorname{sen}(x)]\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+1}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{4+x^4}dx$

4. Si $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x+1}}$, hallar $\displaystyle\int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$. *Sugerencia:* No intente sustituir la ecuación de f dentro de la integral.



"Sin matemáticas, no hay nada que puedas hacer. Todo a tu alrededor es matemáticas. Todo a tu alrededor son números."
Shakuntala Devi
LaTeX

Contenido: Integración por u-sustitución.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XII
Integración por partes

1. Hallar las siguientes integrales:

a) $\int x\,\mathrm{sen}(2x)dx$

b) $\int x\cos(x)dx$

c) $\int xe^{-x}dx$

d) $\int 3^x x dx$

e) $\int x^n \ln(x)dx$

f) $\int x\arctan(x)dx$

g) $\int \mathrm{arc}\cos(x)dx$

h) $\int \arctan(\sqrt{x})dx$

i) $\int \dfrac{\mathrm{arcsen}(x)}{\sqrt{x+1}}dx$

j) $\int x\tan^2(x)dx$

k) $\int x\cos^2(x)dx$

l) $\int \dfrac{\ln(x)}{x^3}dx$

m) $\int \dfrac{x\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

n) $\int \dfrac{\mathrm{arcsen}(\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

ñ) $\int \ln(x^2+1)dx$

o) $\int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

p) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

q) $\int x^2\ln(1+x)dx$

r) $\int x^2e^{-x}dx$

s) $\int x^3e^x dx$

t) $\int x^2a^x dx$

u) $\int x^3\,\mathrm{sen}(x)dx$

v) $\int x^2\cos^2(x)dx$

w) $\int \ln^2(x)dx$

x) $\int \dfrac{\ln^3(x)}{x^2}dx$

y) $\int \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x^6}}dx$

z) $\int \mathrm{arcsen}^2(x)dx$

aa) $\int \arctan^2(x)dx$

ab) $\int e^x\,\mathrm{sen}(x)dx$

ac) $\int e^{3x}\left(\mathrm{sen}(2x)-\cos(2x)\right)dx$

ad) $\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$

ae) $\int \mathrm{sen}\left(\ln(x)\right)dx$

af) $\int \cos\left(\ln(x)\right)dx$

ag) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ah) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

ai) $\int \dfrac{e^x x^2}{(x+2)^2}dx$

aj) $\int x^2e^x\,\mathrm{sen}(x)dx$

ak) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

al) $\int \mathrm{sen}\left(\sqrt[3]{x}\right)dx$

am) $\int \dfrac{\mathrm{arcsen}(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

an) $\int \dfrac{x^2\arctan(x)}{1+x^2}dx$

añ) $\int \dfrac{\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}dx$

ao) $\int \left(x^2-4x+5\right)e^{2x}dx$

ap) $\int e^{2x}\,\mathrm{sen}\left(3x\right)dx$

aq) $\int \left(x^2-3x-3\right)\ln^2(x)dx$

ar) $\int \sec^3(x)dx$

as) $\int \mathrm{arcsen}(x)\ln(x)dx$

at) $\int \ln(x)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

au) $\int x\sec(x)\tan(x)dx$

av) $\int x\left(1+x^2\right)\arctan(x)dx$

aw) $\int \left(x-\mathrm{sen}(x)\right)^3dx$

ax) $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

ay) $\int \cos^2(\sqrt{x})dx$

az) $\int \left(x^2-3x\right)\ln(x-1)dx$

ba) $\int \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx$

bb) $\int x \arccos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

bc) $\int \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)^2}dx$

bd) $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx$

be) $\int \frac{\left(3+x^2\right)^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

bf) $\int x \arctan(x+1)dx$

bg) $\int \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}(x)dx$

bh) $\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^4(x)}dx$

bi) $\int \operatorname{arcsen}^2(x)dx$

bj) $\int \frac{x^2}{\left(x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\right)^2}dx$

bk) $\int \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}dx$

bl) $\int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2}dx$

bm) $\int e^{\operatorname{arcsen}(x)}dx$

bn) $\int e^{\operatorname{sen}(x)}\frac{x\cos^3(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx$

bñ) $\int \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}e^x dx$

bo) $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx$

bp) $\int \frac{xe^{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

bq) $\int \sqrt{e^x}\operatorname{sen}(x)dx$

br) $\int \frac{x}{1+\operatorname{sen}(x)}dx$

bs) $\int \frac{(x^2+1)^{1/2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{x^4}dx$

bt) $\int x\csc^2(x)dx$

bu) $\int \left(\frac{x}{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}\right)^2 dx$

bv) $\int \frac{(3x-4)\ln^2(x)}{x}dx$

bx) $\int \csc^3(x)dx$

by) $\int \frac{(e^x+2^x)^2}{2}dx$

bz) $\int x^2\sec(x)\tan(x)dx$

ca) $\int \cos(x)\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)dx$

cb) $\int \sec^5(x)dx$

cc) $\int \frac{x\operatorname{arcsec}(x)}{\sqrt{x^2-1}}dx$

cd) $\int x^2e^x\cos(x)dx$

ce) $\int x^9\sqrt{6-3x^5}dx$

cf) $\int \ln^6(x)dx$

2. Demuestre que $\int uvdw = uvw - \int uwdv - \int vwdu$

3. Sea $f(x)$ una función monótona continua y $f^{-1}(x)$ su inversa. Aplicando integración por partes demuestre que si $\int f(x)dx = F(x)$ entonces

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)$$

Estudie los casos para las funciones $f(x) = \ln(x)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$.

4. Demuestre que $\int vwzdu = uvwz - \int uwzdv - \int uvzdw - \int uvwdz$

5. Utilice la fórmula anterior para hallar

$$\int xe^x\cos(x)\operatorname{sen}(x)dx$$

6. Demuestre la siguiente versión de la fórmula de integración por partes

$$\int f^{(n)}(x)g(x)dx = f^{(n-1)}(x)g(x) - f^{(n-2)}(x)g'(x) + f^{(n-3)}(x)g''(x) - ... + (-1)^n\int f(x)g^{(n)}dx$$

donde $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ denotan las derivadas n-ésimas de f y g respectivamente.

7. Sean Pn un polinomio de grado n y $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que existen polinomios Q_n y R_n y $A, B, C \in \mathbb{R}$ tales que

   a) $\displaystyle\int P_n(x)\,\mathrm{sen}(ax)dx = Q_n(x)\,\mathrm{sen}(ax) + R_n(x)\cos(ax) + C$

   b) $\displaystyle\int P_n(x)e^{bx}dx?Q_n(x)e^{bx} + C$

   c) $\displaystyle\int P_n(x)\ln(x)dx = xQ_n(x)\ln(x) + xR_n(x) + C$

   d) $\displaystyle\int e^{bx}\,\mathrm{sen}(ax)dx = e^{bx}\left(A\,\mathrm{sen}(ax) + B\cos(bx)\right) + C$

   e) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(ax)\cos(bx)dx = A\,\mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{sen}(bx) + B\cos(ax)\cos(bx) + C$

8. Sea $I = \displaystyle\int e^{sx}\cos(tx)dx$ y $J = \displaystyle\int e^{sx}\,\mathrm{sen}(tx)dx$. Demuestre que:

   a) $tI + sJ = e^{sx}\,\mathrm{sen}(tx) + C$

   b) $sI.tJ = e^{sx}\cos(tx) + C$

9. Sean f y g funciones derivables tales que cada una de ellas es proporcional a su segunda derivada, es decir, existen constantes $h, k \in \mathbb{R}$ tales que para todo x se cumple que $f''(x) = hf(x)$ y $g''(x) = kg(x)$. Aplique integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)g(x)dx = \frac{1}{h-k}\left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right],\ h \neq k$$

   ¿Qué ocurre si $h = k$?

10. Demuestre las siguientes fórmulas de reducción:

    a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}\right),\ m \neq 1$

    b) $\displaystyle\int \left(a^2 \pm x^2\right)^m dx = \frac{x\left(a^2 \pm x^2\right)^m}{2m+1} + \frac{2a^2m}{2m+1}\int \left(a^2 \pm x^2\right)^{m-1} dx\ m \neq -1/2$

    c) $\displaystyle\int \ln^m(x) = x\ln^m(x) - m\int \ln^{m-1}(x)dx$

    d) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^m(x)dx = -\frac{\mathrm{sen}^{m-1}(x)\cos(x)}{m} + \frac{m-1}{m}\int \mathrm{sen}^{m-2}(x)dx,\ m \neq 0$

    e) $\displaystyle\int \cos^m(x)dx = \frac{\cos^{m-1}(x)\,\mathrm{sen}(x)}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}(x)dx,\ m \neq 0$

    f) $\displaystyle\int x^m\sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{a\,(2m+3)}\left(x^m\,(ax+m)^{\frac{3}{2}} - mb\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\right),\ a \neq 0, m \neq -3/2$

    g) $\displaystyle\int \sec^n(x)dx = \frac{tan(x)\sec^{n-2}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)dx,\ n \neq 1$

    h) $\displaystyle\int x^m\,\mathrm{sen}(bx)dx = -\frac{x^m\cos(bx)}{b} + \frac{m}{b}\int x^{m-1}\cos(bx)dx,\ b \neq 0$

    i) $\displaystyle\int x^m\cos(bx)dx = \frac{x^m\,\mathrm{sen}(bx)}{b} - \frac{m}{b}\int x^{m-1}\,\mathrm{sen}(bx)dx,\ b \neq 0$

$j)$ $\displaystyle\int x^n \ln^m(x)dx = \frac{x^{n+1}\ln^m(x)}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n \ln^{m-1}(x)dx,\ n \neq -1$

$k)$ $\displaystyle\int \csc^n(x)dx = -\frac{1}{n-1}\cot(x)\csc^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(x)dx,\ n \neq 1$

$l)$ $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\,\text{sen}(bx) + a\cos(bx)\right) + C$

$m)$ $\displaystyle\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\,\text{sen}(bx) - b\cos(bx)\right) + C$

$n)$ $\displaystyle\int \text{sen}(bx)\cosh(cx)dx = \frac{1}{b^2+c^2}\left(c\text{senh}(cx)\,\text{sen}(bx) - b\cosh(cx)\cos(bx)\right) + C$

$\tilde{n})$ $\displaystyle\int \text{arcsen}^n(x) = \left(x\text{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)\text{arcsen}^{n-1}(x) - n(n-1)\int \text{arcsen}^{n-2}(x)dx$

$o)$ $\displaystyle\int x^n \text{arcsen}(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\text{arcsen}(x) - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ n \neq -1$

$p)$ $\displaystyle\int x^m (ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n + nb\displaystyle\int x^m (ax+b)^{n-1}dx}{m+n+1} \\ \\ \dfrac{x^m (ax+b)^{n+1} + mb\displaystyle\int x^{m-1}(ax+b)^n dx}{a(m+n+1)} \end{cases},\ m+n \neq -1$

$q)$ $\displaystyle\int \text{sen}^m(x)\cos^n(x)dx = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}^{m+1}(x)\cos^{n-1}(x)}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}\displaystyle\int \text{sen}^m(x)\cos^{n-2}(x)dx \\ \\ -\dfrac{\text{sen}^{m-1}(x)\cos^{n+1}(x)}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n}\displaystyle\int \text{sen}^{m-2}(x)\cos^n(x)dx \end{cases},\ m \neq -n$

11. Hallar $\displaystyle\int \text{sen}^4(x)dx$ de dos maneras diferentes: Primero aplicando la fórmula de reducción $d)$ del ejercicio anterior, y después aplicando una fórmula para $\text{sen}^2(x)$, luego combinar ambas soluciones para obtener una identidad trigonométrica impresionante.

12. Expresar a $\displaystyle\int \ln\left(\ln(x)\right)dx$ en términos de $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln(x)}$. Ninguna de estas dos integrales es expresable en términos de funciones elementales.

    Observación: La función $\text{Li}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$ se conoce como **Logaritmo Integral**, esta función es ampliamente aplicada en teoría de números ya que permite dar una estimación de la cantidad de números primos menores a un determinado valor dado.

13. Expresar a $\displaystyle\int x^2 e^{-x^2}dx$ en términos de $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$, ¿En qué rama de las matemáticas se aplica esta integral?

14. Expresar a $\displaystyle\int \frac{e^x - \text{sen}(x)}{(x-\pi)^2}dx$ en términos de $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}$ y $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(x)}{x}dx$ Esta última integral se conoce como **Integral de Dirichlet** ¿En qué rama de las matemáticas se aplica esta integral?

15. Sea $\int \left(ax^2+b\right)\left[\dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2-1}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]dx$

   a) Determine las condiciones que deben cumplir las constantes a, b para que la integral no sea resoluble mediante integración por partes.

   b) ¿Qué ocurre si $b=-a$?

16. Suponga que las funciones f y g están relacionadas por

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

   Demuestre que también es válida la siguiente relación

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\left(g(x)+C\right) - \int f'(x)\left(g(x)+C\right)dx$$

   donde $C \in \mathbb{R}$.

17. Aplicando el ejercicio 16. Calcule las siguientes integrales tomando como C el valor indicado

   a) $\int x\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)dx$, $C=1/2$

   b) $\int x\arctan(2x+3)dx$, $C=-1$

   c) $\int x\ln\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)dx$, $C=-1/2$

   d) $\int \ln(2x-5)dx$, $C=-5/2$

   e) $\int x\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)dx$, $C=-1/2$

   f) $\int \operatorname{arcsen}(\sqrt{x})dx$, $C=-1/2$

   ¿Por qué es indiferente la elección del valor de la constante C al calcular $\int x^2e^x dx$? ¿Qué diferencia hay de esta última integral a las 6 propuestas en este ejercicio? ¿Tienen algo en común las derivadas de la función que se seleccione como u a la hora de aplicar la integración por partes?

18. Hallar $\int_0^1 xf''(2x)dx$ sabiendo que $f(0)=1, f(2)=3$ y $f'(2)=5$.

19. Si $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$ y $\int_0^x \left(f(x)+f''(x)\right)\operatorname{sen}(x)dx=\pi$ Demuestre que el punto $A\left(\pi, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ pertenece al gráfico de f.



"Lo importante a recordar sobre las matemáticas es no tener miedo."
Richard Dawkins
LaTeX

Contenido: Integración por partes.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XIII
Integración por Productos Trigonométricos

Hallar las siguientes integrales:

1. $\int \cos^3(x)dx$
2. $\int \text{sen}^5(x)dx$
3. $\int \text{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$
4. $\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$
5. $\int \text{sen}^4(x)\cos^2(x)dx$
6. $\int \text{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$
7. $\int \frac{\cos^3(x)}{\text{sen}^5(x)}dx$
8. $\int \frac{dx}{\text{sen}^5(x)}$
9. $\int \frac{dx}{\cos^6(x)}$
10. $\int \frac{\text{sen}^6(x)}{\cos^3(x)}dx$
11. $\int \cos^6(3x)dx$
12. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2(x)\cos^4(x)}$
13. $\int \frac{dx}{\text{sen}^5(x)\cos^2(x)}$
14. $\int \frac{dx}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}$
15. $\int \frac{\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}(x)\cos(x)}dx$
16. $\int \frac{dx}{\text{sen}^3(x)}$
17. $\int \sec^5(4x)dx$
18. $\int \tan^3\left(\frac{x}{3}\right)+\tan^4\left(\frac{x}{4}\right)dx$
19. $\int \tan^2(5x)dx$
20. $\int \frac{\csc^4(x)}{\cot^2(x)}dx$
21. $\int \cot^3(x)dx$
22. $\int x^2\,\text{sen}^6\left(x^3\right)dx$
23. $\int \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^4(x)}dx$
24. $\int \text{sen}^5(x)\sqrt[3]{\cos(x)}dx$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{\text{sen}(x)\cos^3(x)}}$
26. $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan(x)}}$
27. $\int \text{sen}(5x)\,\text{sen}(3x)dx$
28. $\int \text{sen}(10x)\,\text{sen}(15x)dx$
29. $\int \cos\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$
30. $\int \cos\left(\frac{x}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)dx$
31. $\int \cos(\alpha x+\beta)\cos(\alpha x-\beta)dx$
32. $\int \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}(\omega t+\phi)dt$
33. $\int \cos^4(4x)\cos(2x)dx$
34. $\int \text{sen}(x)\,\text{sen}(2x)\,\text{sen}(3x)dx$
35. $\int \text{sen}(5x)\cos(x)dx$
36. $\int \text{sen}(x)\,\text{sen}(x+a)\,\text{sen}(x+b)dx$
37. $\int \tan^3(x)\sec^5(x)dx$
38. $\int \left(\frac{\sec(x)}{\tan(x)}\right)^6 dx$

Contenido: Integración por Productos Trigonométricos.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XIV
Integración por sustitución trigonométrica

1. Hallar el valor de las siguientes integrales.

$a)$ $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

$b)$ $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4x+13}dx$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}dx$

$d)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$e)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$f)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}dx$

$g)$ $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$

$h)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$

$i)$ $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

$j)$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2-2}}dx$

$k)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4x^2}}{x}dx$

$l)$ $\displaystyle\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$

$m)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$

$n)$ $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}dx$

$\tilde{n})$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$o)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$

$p)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

$q)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

$r)$ $\displaystyle\int \sqrt{3x^2-3x+1}dx$

$s)$ $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

$t)$ $\displaystyle\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

$u)$ $\displaystyle\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx$

$v)$ $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x-1}dx$

$w)$ $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}dx$

$x)$ $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+5}dx$

$y)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$

$z)$ $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

$aa)$ $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$ab)$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

$ac)$ $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}dx$

$ad)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}$

$ae)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

af) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$ *ag)* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(16-x^2)^{3/2}}dx$

2. Demuestre de dos maneras las siguientes igualdades

a) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{8}\left(a^2+2x^2\right)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)+C$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

g) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

j) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$

k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} + a\arccos\left(\frac{a}{x}\right)+C$

l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

n) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$

ñ) $\displaystyle\int \sqrt{2ax-x^2}dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arccos\left(\frac{a-x}{a}\right)+C$

o) $\displaystyle\int x\sqrt{2ax-x^2}dx = \frac{2x^2-ax-3a^2}{6}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^3}{2}\arccos\left(\frac{a-x}{a}\right)+C$

p) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\arccos\left(\frac{a-x}{a}\right)+C$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arccos\left(\frac{a-x}{a}\right)+C$

Contenido: Integración por sustitución trigonométrica.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XV
Integración por fracciones simples

1. Hallar las siguientes integrales

$a)$ $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}dx$

$b)$ $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$

$d)$ $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}dx$

$e)$ $\displaystyle\int \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)\left(x^3+8\right)}dx$

$f)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$g)$ $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

$h)$ $\displaystyle\int \frac{x^2-37}{x^2+x-12}dx$

$i)$ $\displaystyle\int \frac{x}{x^8-1}dx$

$j)$ $\displaystyle\int \frac{x^2+10}{x^4+16x^2+100}dx$

$k)$ $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^4+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$

$l)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}dx$

$m)$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$

$n)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)}dx$

$\tilde{n})$ $\displaystyle\int \frac{2x+4}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)}dx$

$o)$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

$p)$ $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$

$q)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^3}$

$r)$ $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2-2\right)^2}dx$

$s)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}$

$t)$ $\displaystyle\int \frac{x^9}{\left(x^{10}+2x^5+2\right)^2}dx$

$u)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^3}$

$v)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^3}$

$w)$ $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$

$x)$ $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$

$y)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$

$z)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+7x^2+10}dx$

$aa)$ $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

$ab)$ $\displaystyle\int \frac{32x}{\left(2x-1\right)\left(4x^2-16x+15\right)}dx$

$ac)$ $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx$

$ad)$ $\displaystyle\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$

$ae)$ $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx$

$af)$ $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

$ag)$ $\displaystyle\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$

$ah)$ $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx$

ai) $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx$

aj) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}dx$

ak) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$

al) $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$

am) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)\left(x^3-4x^2+3x\right)}dx$

an) $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$

añ) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

ao) $\int \frac{1}{x^4-x^6}dx$

ap) $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$

aq) $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}dx$

ar) $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx$

as) $\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}dx$

at) $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$

au) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

av) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$

aw) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

ax) $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$

ay) $\int \frac{dx}{1+x^4}$

az) $\int \frac{dx}{1-x^3}$

ba) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

bb) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2x)}$

bc) $\int \frac{3x^2+x+3}{\left(x-1\right)^3\left(x^2+1\right)}dx$

bd) $\int \frac{x^3-8}{x^4+6x^2+8}dx$

be) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$

bf) $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^22\right)^2}dx$

bg) $\int \frac{5x^2-12}{\left(x^2-6x+13\right)^2}dx$

bh) $\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}$

bi) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}$

bj) $\int \frac{dx}{x\left(4+x^2\right)\left(1+x^3\right)}$

bk) $\int \frac{(x+1)^4)}{\left(x^2+2x+2\right)^3}dx$

bl) $\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}dx$

bm) $\int \frac{x^9}{\left(x^4-1\right)^2}dx$

bn) $\int \frac{dx}{x^6+1}$

bñ) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

bo) $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x}dx$

bp) $\int \frac{1+x^2}{2+x^2}dx$

bq) $\int \sqrt{\tan(x)}dx$

br) $\int \sqrt{\tanh(x)}dx$

bs) $\int \frac{e^{4x}+4e^{2x}+1}{\left(e^{2x}+1\right)^2}dx$

bt) $\int \frac{x^5+2x^4+x^3+x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}dx$

bu) $\int \frac{x^3-x^2+5x+1}{x^2-3x+2}dx$

bv) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$

bw) $\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}dx$

bx) $\int \frac{3^{3x}+3^x}{\left(3^{2x}+3^x+1\right)^2}dx$

by) $\int \sqrt{\cot(x)}dx$

bz) $\displaystyle\int \sqrt{\coth(x)}dx$

ca) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

cb) $\displaystyle\int \frac{\arctan(1-e^x)}{e^x}dx$

cc) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\left(1+xe^x\right)}dx$

cd) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{(x-2)^4}dx$

ce) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+2x+5\right)}$

cf) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}+2}{(x-1)^2-\sqrt{x-1}}dx$

cg) $\displaystyle\int \frac{\left(2+\tan^2(x)\right)\sec^2(x)}{1+\tan^3(x)}dx$

ch) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)\left(1+\cos^2(x)\right)}dx$

2. Deduzca una fórmula de reducción para la integral

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},\ a\neq 0,\ b^2-4ac<0$$

y aplique dicha fórmula para calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+5x-1\right)^4}$

Sugerencia: Aplique la identidad $4a\left(ax^2+bx+c\right)=(2ax+b)^2+\left(4ac-b^2\right)$

3. Todo polinomio de la forma

$$P(x)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-1}+...+a_1x^n+a_0x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

es llamado **simétrico**, y se puede factorizar haciendo el cambio de variable $u=x+\dfrac{1}{x}$, use este cambio de variable para hallar el valor de las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x^3+3x^2+2x+1}$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$

4. Hallar $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2-x+1}{x^5+x^3}$ y $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$ de dos maneras distintas, compare sus resulados ¿A qué conclusión puede llegar?



"Profundiza lo suficiente en cualquier cosa y encontrarás las matemáticas"
Dean Schlicter
LaTeX

Contenido: Integración por fracciones simples.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XVI
Integración por la Sustitución Universal de Weierstrass

1. Hallar las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\cos(x)}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}(x)}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\cos(x)}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos(x)+4\operatorname{sen}(x)}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos(x)+2\operatorname{sen}(x)}$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)+2\operatorname{sen}(x)+3}$

j) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$

l) $\displaystyle\int \frac{\sec(x)}{\sec(x)+2\tan(x)-1}dx$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\operatorname{sen}(x)+7\cos(x)}$

n) $\displaystyle\int \sec(x)dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)+\cot(x)}$

o) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}dx$

p) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+2\cos(x)}dx$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\tan(x)}$

r) $\displaystyle\int \frac{3\cos(x)-4\operatorname{sen}(x)}{(3\operatorname{sen}(x)-4\cos(x))^2}dx$

s) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)-3\cos(x)}dx$

t) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)+2\cos(x)}{(\operatorname{sen}(x)-2\cos(x))^2}dx$

u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)+2\cos(x)-3}{\operatorname{sen}(x)-2\cos(x)+3}dx$

v) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}dx$

w) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{3\operatorname{sen}(x)+4\cos(x)-2}dx$

x) $\displaystyle\int \frac{1+\cos(x)}{5\cos^2(x)+4\cos(x)-2}dx$

y) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sec(x))\operatorname{sen}(x)}dx$

z) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos^2(x)}dx$

aa) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2(x)+3\cos^2(x)}$

ab) $\displaystyle\int \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos(x)}dx$

ac) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$

ad) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

ae) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

"Algún matemático dijo que el verdadero placer no reside en el descubrimiento de la verdad, sino en su búsqueda"
Tolstoy
LaTeX

Contenido: Integración por la sustitución universal de Weierstrass.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XVII
Área entre curvas

1. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y la recta $y = x + 2$.
2. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x$, $x = -1$, $x = 2$.
3. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $x = \text{sen}(\pi y)$, $y = (x+1)^2$, $y = 0$, $y = 1$.
4. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y + x^2 = 2$.
5. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = e^x$, $y = \ln(x)$ y $y = -x+e+1$.
6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = 4x - x^2$ y $y = 0$.
7. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 1-x$, las rectas verticales $x = 2$ y $x = 5$ y el eje x.
8. Hallar el área de la región encerrada por $f(x) = \sec(x)$, el eje x y las rectas $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$.
9. Hallar el área de la región limitada por las grácias de las funciones $y = \text{sen}(x)$, $y = \text{sen}(2x)$, $x = 0$, $x = \pi$.
10. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $y = 2x + 3$ en el intervalo $[-3, -2]$.
11. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = 2x^2e^x$ y $y = -x^3e^x$.
12. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $9x^2 + 16y^6 = 144$, $x > 2$.
13. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 1-x^2-2x$, $f(x) = x^2+2$, el eje de las ordenadas y la recta $x = 3$.
14. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \tan(x)$ y $y = \dfrac{2}{3}\cos(x)$.
15. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$, $x = \pi$.
16. Hallar el área de la región encerrada por la curva $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$ y los ejes coordenados.
17. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^3$ y $y = x + \text{sen}(\pi x)$.
18. Hallar el área de la región encerrada por el gráfico de $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, el eje x y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.
19. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2 - 3x$, $y = x^3 - 3x^2$.

20. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x} + 1$ y $y = 2^{\sqrt{x}}$.

21. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $a^2y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$.

22. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2e^{-x}$, el eje x y la recta $x = 2$.

23. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $x = y^3 - y$, $x = y - y^2$.

24. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x\ln^2(x)$, el eje x y la recta $x = e$.

25. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^3$, $y = 8$ y $y = 0$.

26. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(y) = y^2$ $g(y) = 0, y = -1, y = 3$.

27. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2+8$, $y = (x-4)^2$, $y = x-2$ y $x = 0$.

28. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $x = y^3, x = y^2 + 2, y = 0, y = 1$.

29. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $3y = 3x - x^2$, $x = 2y$.

30. Hallar el área de la región encerrada por las rectas $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$ y los gráficos de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

31. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

32. Hallar el área de la región encerrada en una semionda de $f(x) = \text{sen}(x)$ y el eje x.

33. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ y $y = 0$.

34. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = xe^x$ y $g(x) = ex$.

35. Hallar el área de la región liimtada por las gráficas de las funciones $f(x) = 4-x^2$, $y = x^2$ y $y < 2-x$.

36. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \ln(x)$, $y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}$, $x = 1, x = e$.

37. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = (x+1)^2, x = \text{sen}(\pi x), y = 0$ y $y = 1$.

38. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2+2x$, $3y = 10.x$ y $x = 2y$.

39. Demuestre que el área de una circunferencia de radipo r es $A = \pi r^2$.

40. Demuestre que el área de una elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es $A = \pi ab$.

41. Hallar el área de la región encerrada por la parábola $x^2 = 4ay$ y la **Bruja de Agnesi** $y = \dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $a > 0$.

42. Hallar el área de la región formada por la intersección de las circunferencias $x^2+y^2 = 4$ y $x^2+y^2 = 4x$.

43. Hallar el área de la región encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 8$.

44. El área limitada por la curva $y = x^2$ y por la recta $y = 4$ está dividida en dos porciones iguales por una recta $y = c$. Determinar el valor de c.



"Las ciencias matemáticas exhiben particularmente orden, simetría y límites; y esas son las más grandes formas de belleza"
Aristóteles
LaTeX

Contenido: Área entre curvas.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XVIII
Volumen de un sólido de revolución

1. Aplicando el método de las envolventes cilíndricas calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje x cada una de las siguientes regiones. Dibuje cada una de las regiones.

   a) $y^2 - 6y + x = 0, x = 0$
   b) $x = y^2, x = 0, y = 2, y = 5$
   c) $y = x, x = 0, x + y = 2$
   d) $x^4 = y, x = 0, y = 16$
   e) $y = x^2, y = 9$
   f) $y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2$

2. Aplicando el método de las envolventes cilíndricas calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje indicado cada una de las siguientes regiones. Dibuje cada una de las regiones.

   a) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq -1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ Eje de revolución: $x = 4$.
   b) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq x \leq -1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ Eje de revolución: $x = 0$.
   c) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ Eje de revolución: $x = 1$.
   d) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$ Eje de revolución: $x = 0$.
   e) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x - 1}\right\}$ Eje de revolución: $y = 3$.
   f) $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - x^2 \leq y \leq 8x - 2x^2\right\}$ Eje de revolución: $x = -2$

3. Aplicando el método de las envolventes cilíndricas calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje y cada una de las siguientes regiones. Dibuje cada una de las regiones.

   a) $y = \sqrt{4 + x^2}, y = 0, x = 0, x = 4$.
   b) $y^2 = x, x = 2y$
   c) $y = x^2 - x^3, y = 0$
   d) $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$
   e) $y = -x^2 - 6x + 10, y = -x^2 + 6x - 6, x = 0$
   f) $y = -x^2 + 4x - 3, y = 0$
   g) $y = \operatorname{sen}\left(x^2\right), y = 0, x = 0, x = \sqrt{\pi}$
   h) $xy = 1, y = 0, x = 1, x = 10$
   i) $y = x - 2, y = \sqrt{x - 2}$
   j) $y = x^2, y = 4, x \geq 0$

4. Dibuje cada una de las siguientes regiones y encuentre el volumen del sólido de revolución generado al girar dichas regiones alrededor del eje y.

   a) $x = y^{2/3},\ y = 8,\ x = 0$
   b) $xy = 2, y = 6, y = 1, x = 0$
   c) $x = \sqrt{9 - y^2},\ x = 0$
   d) $x = y^{3/2},\ y = 4,\ x = 0$
   e) $x = y^2,\ x = 0,\ y = 2$
   f) $x = \sqrt{y},\ y = 4,\ x = 0$

5. Dibuje cada una de las siguientes regiones y encuentre el volumen del sólido de revolución generado al girar dichas regiones alrededor del eje x.

   a) $xy = 1, x = 1, x = 4, y = 0$
   b) $y = x^3, x = 2, y = 0$
   c) $y^3 = x^2, y = 0, x = 1, x = 8$
   d) $4y = x^2, x = 4, y = 0$
   e) $y^2 = x^3, y = 0, x = 1, x = 3$
   f) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = -1, x = 2$

6. Dibuje cada una de las siguientes regiones y encuentre el volumen del sólido de revolución generado al girar dichas regiones alrededor del eje de revolución indicado.

   a) $x + y = 2, x = 0, y = 0, y = 1$, Eje de revolución: $y = 0$.
   b) $x = y^2, x = 1$, Eje de revolución $x = 1$.
   c) $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1$, Eje de revolución $y = 2$.
   d) $x = -y^2 + 2y, x = 0$, Eje de revolución $x = 2$.
   e) $x + y = 3, y = 2x, x = 0$, Eje de revolución $x = 0$.
   f) $y = \sqrt{x - 1}, x = 5, y = 0$, Eje de revolución $x = 5$.

7. Hallar el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región acotada por la recta $x = -2y$ y la parábola $y^2 - 2x = 0$.

8. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje y de la región limitada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

9. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por la mitad superior de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y el eje x, luego halle el volumen del elipsoide generado. Aquí $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a > b$.

10. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = |x| - r$, alrededor de $x = r$.

11. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región del primer cuadrante limitada por la recta $x = r - h$, la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, con $0 < h < r$ y determine después el volumen de un segmento esférico de altura h, si el radio de la esfera es r.

12. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

13. Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación alrededor de la recta $y = 2$ de la región limitada por las parábolas $3x^2 - 16y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80$ y el eje y.

14. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = x^3, y = x$ alrededor de $x = 2$.

15. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = |x|$, $y = x^2 - 8$ y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$ alrededor de la recta $y = 3$.

16. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 4$ y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$ alrededor de la recta $y = 3$.

17. Halle el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las curvas $y = 3 - \sqrt{1 - x^2}$, $y = |x|$, $x = \pm 1$ en torno a la recta $y = 3$.

18. Por medio de una integral, que no debe evaluar, exprese el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región acotada, por las curvas dadas en torno al eje de revolución indicado.

    a) $x = \cos(y), x = 0, y = 0, y = \dfrac{\pi}{4}$, Eje de revolución $y = 0$.

    b) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, y = 0, x = 0, x = 3$, Eje de revolución $x = 0$.

    c) $y = x^4, y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), x = 5$, Eje de revolución $x = -1$.

    d) $y = \operatorname{sen}(x), y = 0, x = 2\pi, x = 3\pi$, Eje de revolución $x = 0$.

    e) $x = 4 - y^2, x = 8 - 2y^2$, Eje de revolución $y = 5$.

    f) $y = -x^2 + 7x - 10, y = x - 2$, Eje de revolución $y = 0$.

19. Las siguientes integrales representan volúmenes de sólidos de revolución. Describa a los sólidos correspondientes

    a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos(x) dx$

    b) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\pi (4 - x) \operatorname{sen}^4(x) dx$

    c) $\displaystyle\int_0^{2} 2\pi y \left(4 - y^2\right) dy$

    d) $\displaystyle\int_0^{9} 2\pi y^{3/2} dy$

    e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2(x) dx$

    f) $\displaystyle\int_0^{1} 2\pi \left(x^3 - x^7\right) dx$

20. Considérese $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $x^3 y = 1, x = 1, x = 3$ y $y = 0$. Formule, pero no calcule, integrales para cada uno de los siguientes casos

    a) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $x = 4$.

    b) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $y = -1$.

    c) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $x = 0$.

    d) El área de $\mathcal{R}$.

21. Considérese $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Hallar

    a) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $x = 0$.

    b) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $y = 0$.

    c) El área de $\mathcal{R}$.

22. Considérese $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $y = x^3 + 1, y = 0$ en el intervalo $[0, 2]$. Hallar

    a) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $x = 4$.

    b) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $y = -1$.

    c) El volumen de sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de revolución $x = 0$.

    d) El área de $\mathcal{R}$.

23. Calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen al girar la región limitada pro las curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de los siguientes ejes de revolución

    a) $y = 2$ *b*) $x = 0$ *c*) $y = 0$

24. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y alrededor de los siguientes ejes

    a) $y = 8$ *b*) $x = 4$

25. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^2$, la recta $x = 4$ y el eje x alrededor de los siguientes ejes

    a) $y = 8$ *b*) $x = 4$

26. La región limitada por las curvas dadas se hace girar alrededor del eje de revolución indicado. Encuentre, aplicando cualquiero método, el volumen del sólido de revolución resultante

    a) $y = x^2 + x - 2, y = 0$, Eje de revolución $y = 0$.
    b) $y = x\sqrt{1 + x^3}, y =, x = 0, x = 2$, Eje de revolución $x = 0$.
    c) $y = x^2 - 3x + 2, y = 0$, Eje de revolución $x = 0$.
    d) $x = 1 - y^2, x = 0$, Eje de revolución $x = 0$.



"Las ciencias matemáticas exhiben particularmente orden, simetría y límites; y esas son las más grandes formas de belleza"
Aristóteles
LaTeX

Contenido: Volumen de un sólido de revolución.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XIX
Integrales impropias

1. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias de primera especie

$a)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^5}dx$

$b)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

$c)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\cdot 5^{-x^2}dx$

$d)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$

$e)$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

$f)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}(x)dx$

$g)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$

$h)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$

$i)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\arctan(x)}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

$j)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

$k)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

$l)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2}$

$m)$ $\displaystyle\int_0^\infty x\cos(x)dx$

$n)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$

$\tilde{n})$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+3x+2}dx$

$o)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

$p)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}dx$

$q)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

$r)$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^4+4x^2}$

$s)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$

$t)$ $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln(x)\sqrt{\ln(x)}}$

$u)$ $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

$v)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$

$w)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$

$x)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2-6x)^{3/2}}$

$y)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$

$z)$ $\displaystyle\int_\infty^\infty \frac{x^2}{x^6+a^2}dx$

$aa)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$

$ab)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x+2)^3}dx$

$ac)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{x-e^x}dx$

$ad)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

$ae)$ $\displaystyle\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

$af)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx$

$ag)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$

$ah)$ $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{csch}(x)dx$

$ai)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{(1+x^3)^{5/2}}dx$

$aj)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+4x^2}$

$ak)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x+a^2)(x^2+b^2)}dx$

$al)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$

$am)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias de segunda especie

$a)$ $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}dx$

$b)$ $\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-9}}$

$c)$ $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{|\sqrt[3]{1+x}|}dx$

$d)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$e)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^{4/3}(x)}dx$

$f)$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

g) $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$

h) $\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

i) $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}dx$

j) $\int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

k) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$

l) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

m) $\int_{2a}^{4a} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4a^2}}$

n) $\int_0^1 x\ln(x)dx$

ñ) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

o) $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^{-2/3}}dx$

p) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}$

q) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{9-x}}$

r) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec(x)dx$

s) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

t) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

u) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

v) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$

w) $\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{arc}\cos^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

x) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}dx$

y) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

z) $\int_0^1 \frac{x}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}dx$

aa) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{\tan(x)}}dx$

ab) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ac) $\int_0^a \frac{a^2-\pi x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

ad) $\int_0^3 \frac{2x}{(x^2-1)^{2/3}}dx$

ae) $\int_{-1}^2 \frac{x^5}{\sqrt{x-1}}dx$

af) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{(x+2)(1-x)}$

ag) $\int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}, a>0$

ah) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

ai) $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x\ln^{1/5}(x)}$

aj) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}dx$

ak) $\int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-32)^2}}$

al) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{(16-2x^2)^{2/3}}dx$

am) $\int_a^{2a} \frac{x}{\sqrt{x^2+ax-2ax^2}}dx$

3. Si $a>0$ y $b^2-4ac<0$ demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$

4. Determinar los valores de α para los que la integral $\int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+\alpha}\right)dx$ y para estos valores determine el valor de la integral.

5. Determinar los valores de α para los que la integral $\int_0^\infty \left(\frac{x}{2x^2+4\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}\right)dx$ y para estos valores determine el valor de la integral.

6. Determinar los valores de α para los que la integral $\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{2x+1}\right)dx$ y para estos valores determine el valor de la integral.

7. Determinar los valores de α para los que la integral $\int_0^\infty \left(\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$ y para estos valores determine el valor de la integral.

8. Demuestre que $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^\alpha(x)}$ converge si $\alpha>1$ y diverge si $\alpha<1$ ¿A cuál valor converge la integral? ¿Qué ocurre si $\alpha=1$?

9. Demuestre que $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$

10. Hallar el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $y = \dfrac{2x}{1+x^4}$ y $y = -\dfrac{4x}{1+x^4}$

11. *a)* Demuestre que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$

    b) Hallar el área de la región encerada por la gráfica $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$ y la asíntota hallada en *a)*

12. Hallar el valor de la siguiente integral $\displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$ con $a > 0$.

13. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^3}$ y el eje x y que está a la izquierda de la recta $x = 2$.

14. Hallar el área de la región que está a la derecha de la recta $x = 1$ y entre las curvas $xy - x = 1$, $x^2y + 2y - x^2 - x = 2$

15. Hallar el área de la región encerrada por la curva $xy^2 = 3a - x, a > 0$ y el eje y

16. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$, el eje x y que se encuentra a la derecha de la recta $x = 1$.

17. *a)* Demuestre que el eje x es una asíntota horizontal de la función $\phi(x) = xe^{-x^2/4}$.
    b) Hallar el área de la región encerrada por ϕ y su asíntota horizontal.

18. Hallar el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$

19. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$ y el eje x.

20. Hallar el área de la región del primer cuadrante encerrada pro la gráfica de $y = \left(x^2+3x\right)e^{-x}$ y el eje x.

21. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de $f(x) = e^{-|x-1|}$ y el eje x.

22. **Definición:** Sea $f(x)$ una función real en la variable real x, donde $x \geq 0$. **La Transformada de Laplace de la función $f(x)$** es la función $\mathcal{L}(f(x))$ dada por la siguiente integral impropia, en caso de que ésta converga

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones

a) $f(x) = 1$ *c)* $f(x) = x^2$ *e)* $f(x) = \operatorname{sen}(\alpha x)$

b) $f(x) = x$ *d)* $f(x) = x^3$ *f)* $f(x) = \cos(\alpha x)$



"El estudio de las matemáticas, como el Nilo, comienza con minuciosidad pero termina con magnificiencia "
Charles Caleb Colton
LaTeX

Contenido: Integrales impropias.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XX
Longitud de arco

1. Hallar la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado

   a) $f(x) = cos(x)$ si $0 \leq x \leq 1$
   b) $f(x) = x^2 + 4$ si $0 \leq x \leq 3$
   c) $f(x) = e^x$ si $0 \leq x \leq 1$
   d) $f(x) = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ si $2 \leq x \leq 4$
   e) $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$ donde $\dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$
   f) $f(x) = a \ln\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$ si $a \leq x \leq b$ con $a > 0$ y $b > 0$.
   g) $x = 4 - y^{2/3}$ si $1 \leq x \leq 8$
   h) $f(x) = 2x + 1$ si $0 \leq x \leq 3$
   i) $f(x) = x$ si $-3 \leq x \leq 6$
   j) $f(x) = x^{3/2} + 4$ si $0 \leq x \leq 1$
   k) $f(x) = 4x^{2/3}$ si $0 \leq x \leq 8$
   l) $f(x) = 2\sqrt{x + 1}$ si $0 \leq x \leq 3$
   m) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2 - 1}dt$ si $1 \leq x \leq 2$
   n) $f(x) = \displaystyle\int_{\pi/6}^x \sqrt{16\cos^2(t)\,\mathrm{sen}^2(t) - 1}dt$ si $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
   ñ) $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$ si $4 \leq y \leq 9$

2. Demuestre que la longitud de una circunferencia de radio r es $L = 2\pi r$

3. Sean $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$ demuestre que la distancia $d(A, B)$ está dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

4. Formule una integral que permita calcular la longitud de una elipse, no trate de hallar dicha integral, ya que la función a integrar no posee primitiva elemental.

5. Calcule el perímetro de las siguientes regiones, las cuales se encuentran limitadas por las curvas que se indican

   a) $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2 - x^2$
   b) $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$
   c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$
   d) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $g(x) = x^2 - r^2$ con $r > 0$

"Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí"
Marcus du Sautoy
LaTeX

Contenido: Longitud de arco.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XXI
Introducción a las ecuaciones diferenciales

1. En todo punto de una curva se cumple que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$, además la ecuación de la recta tangente en el punto $A(1,1)$ es $y = 2 - x$, determinar la ecuación de dicha curva.

2. Es conocido que la pendiente de la recta tangente a una curva en todo punto es $m(x) = 2x - 3$ sabiendo que la curva pasa por el punto $A(3,2)$. Determinar su ecuación.

3. La ecuación recta tangente a una curva en el punto $A(1,3)$ es $y = x + 2$, sabiendo que en todo punto se cumple que $y'' = 6x$. Determinar la ecuación de dicha curva.

4. De una función se sabe que $f(-1) = 3$ y $f(0) = 2$ y además que $f''(x) = 2 - 4x$. Hallar la ecuación de f.

5. Una función f es tal que $f'''(x) = 2$ y el punto $A(1,3)$ es un punto de inflexión, por A pasa una recta cuya pendiente es -2. Con esta información determine la ecuación de f.

6. Demuestre que las funciones $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = \sqrt{x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ donde $x > 0$.

7. Demuestre que la función $f(x) = e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y' - 2y = 0$ y que todo multiplico de f también es solución de dicha ecuación.

8. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + y^2 = 0$, para todo $x > 0$ pero que todo múltiplo de f no es solución de la ecuación.

9. Considérese la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$ para todo $x > 0$. Demuestre que $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ son soluciones de la ecuación, ¿$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es solución de dicha ecuación para cualquier $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$?

10. Sea $y = y_1(x)$ una solución de la ecuación $y' + p(x)y = 0$ y $y = y_2(x)$ una solución de la ecuación $y' + p(x)y = q(x)$ Demuestre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ es también una solución de $y' + p(x)y = q(x)$.

11. Hallar los valores de α para los que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan como solución a $y(x) = x^\alpha$ para todo $x > 0$

    a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ *b)* $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

12. Hallar los valores de β para los que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan como solución a $y(x) = e^{\beta x}$

    a) $y' + 2y = 0$ *b)* $y'' - y = 0$ *c)* $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ *d)* $y'' + y' - 6y = 0$

Contenido: Introducción a las ecuaciones diferenciales.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XXII
Ecuaciones diferenciales separables

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x)\left(\cos(2y) - \cos^2(y)\right)$

b) $(1+e^x)\,yy' = e^y$

c) $e^y(1+x^2)y' = 2x(1+e^y)$

d) $y' = a^{x+y}$

e) $(e^y+1)^2e^{-y}dx + (e^x+1)^3e^{-x}dy = 0$

f) $a^2 + y^2 + 2xy'\sqrt{ax-x^2} = 0$

g) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

h) $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$

i) $\sec(y)\dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x+y)$

j) $\operatorname{sen}(3x)dx + 2y\cos^3(3x)dy = 0$

k) $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$

l) $y\ln(x)\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

m) $e^x y\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

n) $e^{-y}(1+y') = 1$

ñ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

o) $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$

p) $x\ln(y)\ln(x)dy + dx = 0$

q) $y - xy' = a(1 + x^2y')$

r) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

s) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$

t) $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}$

u) $y' = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

v) $1 + y^2 = xy'$

w) $\sec(x)dy = x\cot(y)dx$

x) $y' + 2(x-y) = 0$

y) $(2x - 2y + 5)dx - (4x - 4y + 9)dy = 0$

z) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y+1)^2$

aa) $2y' = (2x+y)^2$

ab) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x-y)$

ac) $y' = ax + by + c$

ad) $(x^2y^2 + 1)y + (xy-1)^2xy' = 0$

ae) $x^3 + y^3 + 3xy^2y' = 0$

af) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

ag) $x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$

ah) $(x^2y^3 + y + x - 2)dx + (x^3y^2 + x)dy = 0$

ai) $(x+y)^2y' = a^2$

aj) $2dx + (2x+3y)dy = 0$

ak) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}$

al) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$

am) $\dfrac{dx}{dy} = \operatorname{sen}(x-y)$

an) $(x+y)dx + (x+y-2)dy = 0$

añ) $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$

ao) $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

ap) $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0$

Contenido: Ecuaciones diferenciales separables.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

GUÍA XXIII
Ecuación Diferencial de 1er orden

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

a) $xy' + \dfrac{3}{x} = \operatorname{sen}(x)$
b) $y' - y = 4$
c) $y' - 2xy = e^{x^2}$
d) $xy' + 2y = 3x$
e) $y' = (1-y)\cos(x)$
f) $y' + y\cot(x) = \cos(x)$
g) $y' - 2y = 3e^{2x}$
h) $xy' + 5y = 7x^2$
i) $y' = 2xy + 3x^2e^{x^2}$
j) $y' + 3y = 2xe^{-3x}$
k) $2xy' + y = 20\sqrt{x}$
l) $y' = 20y$
m) $y' - 3y = x$
n) $y' + y = e^{3x}$
ñ) $3y' + 12y = 4$
o) $y' + 3x^2y = x^2$
p) $y' + 2xy = x^2$
q) $x^2y' + xy = 1$
r) $y' = 2y + x^2 + 5$
s) $xy' - y = x^2\operatorname{sen}(x)$
t) $xy' + 2y = 3$
u) $xy' + 4y = x^3 - x$
v) $(1+x)y' - xy = x + x^2$
w) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$
x) $xy' + (1+x)y = e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$
y) $ydx - 4(x+y^6)dy = 0$
z) $ydx = (ye^y - 2x)dy$
aa) $\cos(x)y' + \operatorname{sen}(x)y = 1$
ab) $\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)y' + \cos^3(x)y = 1$
ac) $(x+1)y' + (x+2)y = 2xe^{-x}$
ad) $(x+2)^2y' = 5 - 8y - 4xy$
ae) $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec(\theta) = \cos(\theta)$
af) $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$
ag) $xy' + (3x+1)y = e^{-3x}$
ah) $(x^2-1)y' + 2y = (x+1)^2$

2. Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

a) $xy' + y = e^x,\ y(1) = 2$
b) $yx' - x = 2y^2,\ y(1) = 5$
c) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E,\ i(0) = i_0$
d) $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m),\ T(0) = T_0$
e) $y' + \cot(x)y = 2\csc(x),\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$
f) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2x},\ y(0) = \dfrac{1}{2}$
g) $x' + \ln(t)x = t^{-t},\ x(1) = 2$

3. Demuestre que el problema de valor inicial $xdy - ydx = y^2dy,\ y(0) = 0$ tiene infinitas soluciones. Determine la expresión explícita de cada una de ellas.

4. Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial

$$y' + p(x)y = g(x),\ y(3) = e^{-3}$$

donde

$$p(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

5. Consideremos la ecuación diferencial de primer orden $y' + p(x)y = g(x)$

   a) Sean $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$ primitivas de $p(x)$. Entonces $e^{\alpha_1(x)}$ y $e^{\alpha_2(x)}$ son factores integrantes. Demuestre que ambos factores integrantes conducen a la misma solución general.

   b) Si $\mu(x)$ es un factor integrante. Demuestre que $\varphi(x) = \dfrac{1}{\mu(x)}$ es solución de $y' + p(x)y = 0$.

6. Hallar el valor de α para que el problema de valor inicial $xy' + 2x^2y = e^{-x^2},\ y(1) = \alpha$ tenga por solución a $y(x) = e^{-x^2}\left(\ln(x) + 1\right)$



"La matemática es la puerta y la llave de las ciencias"
Roger Bacon
LaTeX

Contenido: Ecuación diferencial de primer orden.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

GUÍA XXIV
Ecuaciones diferenciales homogéneas

1. Indique cuáles de las siguientes funciones son homogéneas y en caso de serlas indique cuál es su grado.

   a) $f(x,y,z)=\dfrac{zy^2}{x^2}\left(\ln(y)-\ln(x)\right)$

   b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

   c) $f(x,y)=\dfrac{y-x}{x-2y+1}$

   d) $f(x,y)=x+y$

   e) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y}}{e^{-\frac{y}{x}}}$

   f) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2-xz+yz}{z^2+y\sqrt{x^2-z^2}}$

   g) $f(x)=x^2+1$

   h) $f(x,y)=x^2+y^2-xy$

   i) $f(x)=x^4$

   j) $f(x,y,z)=z^{10}\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   k) $f(x,y)=x^2y-y^3+5$

   l) $f(x,y)=x^3+2xy^2+2y^3$

   m) $f(x,y)=\tan\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$

2. Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) $2xy'\left(x^2+y^2\right)=y\left(y^2+2x^2\right)$

   b) $2x^2ydx=\left(3x^2+y^3\right)dy$

   c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy-3\left(x^2+y^2\right)\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)}{x^2}$

   d) $\left(x^2+xy+3y^2\right)\dfrac{dy}{dx}-\left(x^2+2xy\right)=0$

   e) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

   f) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\sec\left(\dfrac{y}{x}\right)+y}{x}$

   g) $\left(x^2+xy-y^2\right)dx+xydy=0$

   h) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

   i) $\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7y^3-xy^2\right)dy=0$

   j) $4x^2-xy+y^2=\left(xy-x^2-4y^2\right)y'$

   k) $3tx+x^2+\left(3tx+t^2\right)x'=0$

   l) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{y^2}+1$

   m) $4x-3y+(2y-3x)y'=0$

   n) $x\dfrac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

   ñ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y+\sqrt{x^2-y^2}}{2x}$

   o) $\left(3t^2x+x^3\right)x'+2t^3=0$

   p) $y'=\dfrac{y}{x}\left(\ln(y)-\ln(x)\right)$

   q) $x^3-3xy^2+\left(y^3-3x^2y\right)y'=0$

   r) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)+x}{x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

   s) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+2x\exp\left(-\dfrac{y}{x}\right)}{x}$

   t) $\left(x^2\exp\left(-\dfrac{y}{x}\right)+y^2\right)dx=xydy$

   u) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

   v) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y\sec\left(\dfrac{x}{y}\right)+x}$

w) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$

x) $2xy'\left(x^2+y^2\right) = y\left(y^2+2x^2\right)$

y) $y' = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$

z) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

aa) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

ab) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$

ac) $\left(y + x\cot\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx - xdy = 0$

ad) $x^2y' = xy + x^2e^{y/x}$

ae) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4+y^4}{2x^3y}$

af) $x^2 + y^2 - xyy' = 0$

ag) $\left(x+\sqrt{xy}\right)dy - ydx = 0$

3. Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

a) $x\dfrac{dy}{dx} = y + x\exp\left(\dfrac{y}{x}\right),\ y(1) = -2$

b) $ydx + x\left(\ln(x) - \ln(y) - 1\right)dy = 0,\ y(1) = e$

c) $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3,\ y(1) = 2$

d) $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2+y^2}dy,\ y(0) = 1$

e) $\left(x+\sqrt{xy}\right)\dfrac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2},\ y(1) = 1$

f) $y^2dx + \left(x^2+xy+y^2\right)dy = 0,\ y(0) = 1$

g) $\left(x^2+2y^2\right)dx = xydy,\ y(-1) = 1$

h) $2x^2\dfrac{dy}{dx} = y + \exp\left(\dfrac{y}{x}\right),\ y(1) = 1$

i) $\left(x + ye^{y/x}\right)dx - xe^{y/x}dy = 0,\ y(1) = 0$

j) $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2+y^2}dy,\ y(0) = 1$

k) $\left(y^2+3xy\right)dx = \left(4x^2+xy\right)dy,\ y(1) = 1$

l) $-2x^2 - 2xy + y^2 + x^2y' = 0,\ y(1) = 3$

m) $y^3dx - 2x^3dy = 2x^2ydx,\ y(1) = \sqrt{2}$

4. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $(x+2y-2)dx + (2x+4y+5)dy = 0$

b) $\dfrac{2x+y}{x-y+3} = \dfrac{dx}{dy}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x-y+2)^{-1}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-x}{2x-y}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2y-1}{3x-6y+2}$

f) $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$

g) $(x+y-4)dx + (x-y+2)dy = 0$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-3y-5}{3y-2x}$

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+3}{3x+y+1}$

j) $(3y-7x+7)dx = (3x-7y-3)dy$

k) $(2x-4y)dx + (x+y-3)dy = 0$

l) $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0$

m) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+3y+15}{2x+y+7}$

n) $(x-2y-1)dx + (3x-6y+2)dy = 0$

ñ) $(x+y)dx + (x+y-1)dy = 0$

o) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+7}{-2(x+y)+1}$

p) $2x + 2y - 1 + y'(x+y-2) = 0$

q) $(7x-y+5)dx - (x+y)dy = 0$

r) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$

s) $(-3x+y+6)dx + (x+y+2)dy = 0$

t) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x-3y-5}{x+y-1}\right)^2$

u) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$

v) $\sqrt{x+y+1}y' = \sqrt{x+y-1}$

5. Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

   a) $x' = \dfrac{x-t+4}{2x+2t-6},\ x(0)=2$

   b) $x' = \dfrac{x+t+4}{2x+2t-6},\ x(0)=2$

   c) $2x+y-1+y'(x+y-2)=0,\ y(0)=1$

   d) $2x+2y-1+y'(x+y-2)=0,\ y(0)=1$

6. Halle la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^5+3x^2y^2}{2x^3y-2y^3}$$

   Haciendo $x=u^p$ y $y=v^q$ escoja las constantes p y q apropiadamente. Con el cambio $y=vx^n$ y eligiendo correctamente el valor de n, ¿Se podría resolver la ecuación diferencial?

   Este tipo de ecuaciones se conocen como **ecuaciones diferenciales isóbaras** que es una generalización de las ecuaciones diferenciales homogéneas.

7. Demuestre que la ecuación diferencial

$$xdy - ydx = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

   puede resolverse por medio de la sustitución $z=\dfrac{y}{x}$ aún cuando la ecuación diferencial no es homogénea, explique porqué ocurre esto.



"Para los estudiosos y laicos por igual, no es filosofía, sino la experiencia activa en la matemática misma que el único que puede responder a la pregunta: ¿Qué es la matemática?"

Richard Courant

LaTeX

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas II (8208) - Sección U3
Período Lectivo: I-2023
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

GUÍA XXV
Ecuación diferencial de Bernoulli

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $x^2\dfrac{dy}{dx}+y^2=xy$

   b) $y'+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^2$

   c) $y'+y\cos(x)=y^5\,\mathrm{sen}(2x)$

   d) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$

   e) $y'-5y=-\dfrac{5}{2}xy^3$

   f) $x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$

   g) $xy'+y=y^2\ln(x)$

   h) $xy^2y'+y^3=x\cos(x)$

   i) $\dfrac{dy}{dx}-y=e^xy^2$

   j) $y'=\dfrac{y^2+2xy}{x^2}$

   k) $y'-\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{4}(1+x^2)y^3=0$

   l) $x^2y'+2xy-y^3=0$

   m) $y-xy^2\ln(x)+xy'=0$

   n) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$

   ñ) $(1+x^2)y'=xy+(xy)^2$

   o) $3(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=2xy(y^3-1)$

   p) $8xy'-y=-\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

   q) $x\dfrac{dy}{dx}-(1+x)y=xy^2$

   r) $\dfrac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$

   s) $3xy'-2y=\dfrac{x^3}{y^2}$

2. Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

   a) $x^2y'-2xy=3y^4,\ y(1)=1$

   b) $2y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2},\ y(2)=2$

   c) $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx}+y^{3/2}=1,\ y(0)=4$

   d) $xy(1+xy^2)y'=1,\ y(1)=0$

   e) $2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2},\ y(1)=1$

   f) $xy(1+xy^2)\dfrac{dy}{dx}=1,\ y(1)=0$

3. Hallar de dos maneras diferentes la solución de la ecuación diferencial $y'=\alpha y-\beta y^n$, con α,β y $n\neq 0$, $n\neq 1$ constantes.



"¡Esto es todo amigos!"
Bugs Bunny
LaTeX

Contenido: Ecuación diferencial de Bernoulli.